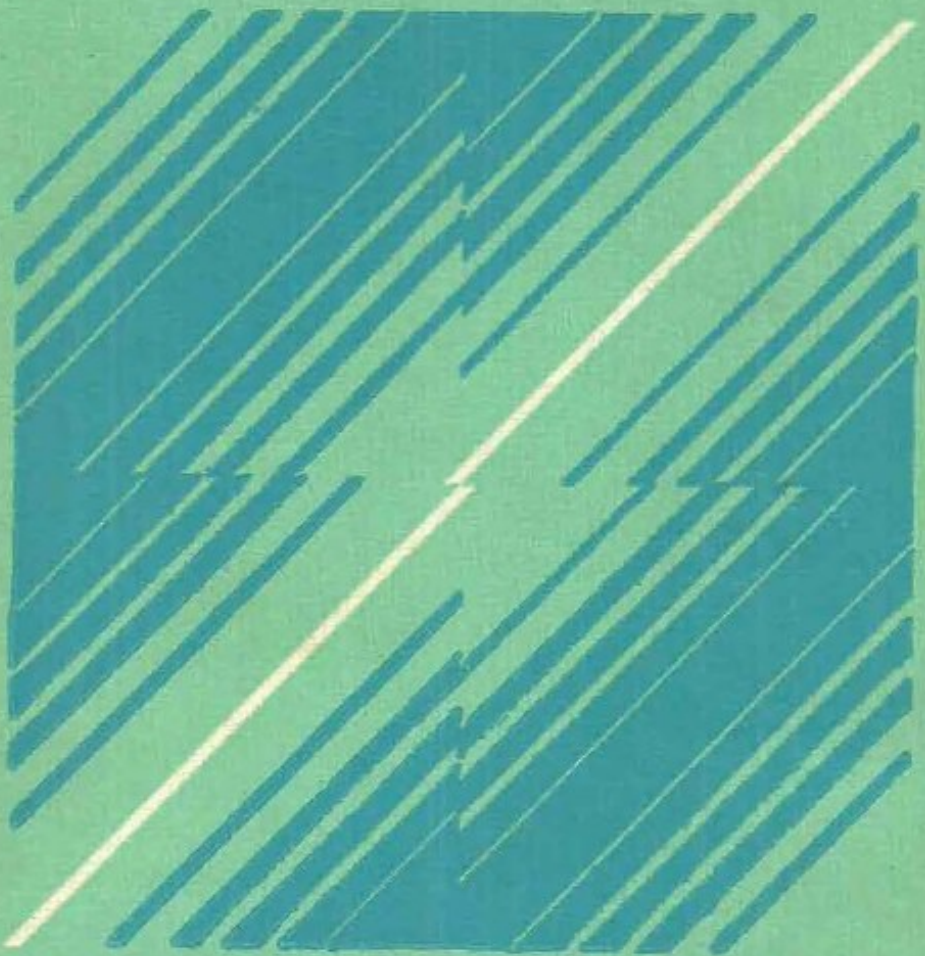
Șunturi și divizoare de tensiune

Gh. Hortopan · Viorica Hortopan



EDITURA TEHNICĂ

Prof. dr. ing. Gheorghe Hortopan
Conf. dr. ing. Viorica Hortopan

Șunturi și divizoare de tensiune

Editura tehnică
București 1978

Lucrarea prezintă, într-o manieră originală, probleme teoretice, de calcul, proiectare și utilizare referitoare la convertoarele numite șunturi coaxiale și divizoare de tensiune cu largi posibilități de măsurare și anume : curenți intenși pînă la 500 kA și tensiuni înalte pînă la 10 MV, în condiții de conservare a unei benzi largi de frecvență.

Construcția și funcționarea acestora este fundamentată din punct de vedere teoretic, pe baza criteriilor de calitate preluate din tehnica reglajului automat și anume : timpul de răspuns, timpul de creștere, banda de frecvență. Este dată o clasificare a acestor convertoare de măsură, dată fiind marea varietate a lor, astfel încît să ofere cititorului posibilitatea de a alege pe cel adecvat schemei de încercare sau măsurare pe care trebuie să o realizeze. În cadrul lucrării se analizează și locul șunturilor coaxiale și al divizoarelor de tensiune în schemele electrice de încercări și interacțiunea cu alte elemente ale schemei.

Lucrarea cuprinde atît o sinteză a experienței actuale pe plan mondial în acest domeniu, cît mai ales contribuții originale ale autorilor rezultate din bogata experiență acumulată pe parcursul a mulți ani de activitate în domeniul măsurării de curenți intenși și tensiuni înalte. Aceste contribuții originale constau în elaborarea unor noi relații de calcul, cum ar fi cele pentru determinarea timpului de creștere, compensarea șuntului etc., de noi metode de încercare și instalații de etalonare a acestor convertoare, a numeroase construcții de șunturi și divizoare de tensiune, din care unele sînt brevetate și utilizate deja în industria electrotehnică din țară.

Lucrarea este utilă inginerilor și tehnicienilor care lucrează în domeniul electrotehnicii de curenți intenși.

Control științific : Ing. **CHIRIL POPESCU**

Redactor : Ing. **PAULINA DUMITRESCU**

Tehnoredactor : **VALERIU MORĂRESCU**

Coperta : **SIMONA NICULESCU**

Bun de tipar: 18 IV 1978. Coli de tipar: 13
Tiraj: 4 800 + 70 + 20 exemplare legate
C.Z.: 621.317.727.1|3

c. 1517 — I. P. INFORMAȚIA
Str. Brezoianu Nr. 23—25
București

Shunts and voltage dividers

The authors present the reader with an original, scientifical description of the theory, structural analysis and design, as well as use of certain converters called coaxial shunts and voltage dividers; these have wide measuring ranges and namely: current intensities up to and including 500 kA with voltages up to and including 10 MV, within very wide frequency bands.

The design and operation of such devices are theoretically based on quality criteria borrowed from the automated control technique, i.e.: response time, rise time, frequency band. With an end at helping the reader making the most adequate choice, the authors give a classification of these converters, which is most useful seing their very wide variety. They also consider the place taken by coaxial shunts and voltage dividers within wiring diagrams for testing purposes, as well as the interactions between these devices and other components of the electric arrangement under consideration.

The work, which is basically a synthesis of the present state-of-the-art at a world--wide level, includes in addition the original contributions of the authors — i.e. the results of more than 15 years of activity in the field of high-current, high voltage measurements. Such contributions are, for instance: new computing relations applied to find the rise time or to compensate the shunt; new testing methods and calibration arrangements for such converters; new shunt and voltage divider designs (of which some are patented and already industrially used in the romanian electrical engineering.

From the contents: Criteria to estimate the quality of measuring devices (stepped excitation, sloped excitation, sinewave excitation). Shunts for high-current measurements (two-wire and coaxial shunts). Examples of coaxial shunt designs. Voltage deviders (simple structure of voltage deviders, complex structure of voltage deviders with due consideration given to the propagation phenomenon within the devider). Examples of voltage devider designs. Frequency spectra (stepped, exponential, straight pulse, sloped pulse, voltage standard pulse, post-arc-discharge-current). Arrangements for assessing the performances. Applications to power transformer, circuit-breaker, mutator testing. Interferences in measuring networks. Computations (Appendixes).

The book is useful to all engineers and technicians concerned with high-current electrical engineering.

Shunts et diviseurs de tension

Les auteurs abordent d'une façon nouvelle et originale les problèmes théoriques soulevés par le calcul, l'étude et l'emploi des convertisseurs désignés sous le nom de shunts coaxiaux et diviseurs de tension à larges possibilités de mesure : courants forts, jusqu'à 500 kA ; et hautes tensions, jusqu'à 10 MV, à l'intérieur d'une large bande de fréquences.

Le fondement théorique de la construction et fonctionnement de ces dispositifs est constitué par des critères qualitatifs empruntés à la technique de la régulation automatique, à savoir : le temps de croissance, le temps de réponse et la bande des fréquences. Le lecteur peut trouver une classification claire de ces convetisseurs de mesure laquelle, compte tenu de leur grande diversité, lui est très utile pour choisir l'appareil qui répond le mieux aux conditions requises par le montage de mesure ou d'essai qu'il veut réaliser. Dans le même ordre d'idées et aux mêmes fins, il trouvera une analyse servant à déterminer la place que les shunts coaxiaux et les diviseurs de tension doivent occuper dans les montages électriques destinés aux essais, ainsi que l'interaction entre ceux-ci et les autres éléments du montage.

Extraits du contenu : Critères servant à aprecier la qualité des dispositifs de mesure (excitation échelon, excitation en rampe, excitation sinusoidale). Shunts à mesurer les courants forts (shunt bifilaire, shunt coaxial). Exemples pratiques de shunts coaxiaux. Diviseurs de tension (structure simple des diviseurs de tension, structure complexe des diviseurs de tension, compte tenu du phénomène de propagation à l'intérieur du diviseur). Exemples de realisations pratiques de diviseurs de tension. Spectres de fréquence (échelon, exponentiel, impulsion droite, impulsion en rampe, impulsion normalisée de tension, courant sinusoidal coupé, courant post-arc). Installations servant aux essais de performances. Applications à l'essai des transformateurs de puissnace, des interrupteurs, des mutateurs. L'interférence, dans les montages de mesure. Annexes servant aux calculs mathématiques.

L'ouvrage est un travail de synthèse, fruit de l'expérience gagnée au niveau de la technique mondiale dans ce domaine, et surtout des contributions originales apportées par les auteurs comme suite à leur activité de plus de 15 ans dans la branche des courants forts et des hautes tensions. Ces contributions originales consistent notamment en : nouvelles relations mathématiques pour calculer, par exemple, le temps de croissance, la compensation du shunt etc. ; nouvelles méthodes et montages d'essai et calibrage de ces convertisseurs ; un grand nombre de constructions de shunts et diviseurs de tension, dont certaines sont brevetées et déjà largement utilisées à l'échelon industriel en Roumanie.

L'ouvrage est destiné aux ingénieurs et techniciens qui s'occupent des courants forts et de leurs applications.

Шунты и делители напряжения

В книге оригинально представлены теоретические проблемы расчета, проектирования и использования конверторов называемых коаксиальными шунтами и делителями напряжения с обширными возможностями измерения: токи до 500 ка и напряжения до 10 Мв, в условиях сохранения широкой полосы частот.

Их конструкция и работа обоснованы теоретически на основе качественных критериев, заимствованых из техники автоматической регулировки: время ответа, скорости роста, полоса частоты. Дана ясная классификация этих измерительных конверторов, вследствии их большой разнообразности, с целью облегчить выбор наиболее соответствующего испытываемой схеме или измерению которое должно производится. В книге рассматривается и место коаксиальных шунтов и делителей напряжения в электрических схемах испытания и их взаимодействие с другими элементами схемы.

Книга содержит синтез современного мирового опыта в этой области, также как и оригинальный вклад авторов на основе богатого опыта накопившегося за многие годы работы в области измерения интенсивных токов и высоких напряжений. Вклад заключается в разработке новых расчетных отношений, таких как например для определения времени роста, компенсации шунта и т.д.; новых методов испытания, установки для эталонирования этих конвертеров; многочисленные конструкции шунтов и делителей напряжения, некоторые из которых запатентованы и в настоящее время, используются в электротехнической промышленности Румынии.

СОДЕРЖАНИЕ: Критерии оценки качества измерительных устройств (ступень возбуждения, линейное возбуждение, синусоидальное возбуждение). Шунты для измерения сильных токов (двухпроводные шунты, коаксиальные шунты). Примеры осуществления коаксиальных шунтов. Делители напряжения (простая структура делителей напряжения, сложная структура делителей напряжения, принимая во внимание явление распространения в делителе). Примеры осуществления делителей напряжения. Спектры частоты (ступень, экспоненциал, прямой импульс, стандартный импульс напряжения, прерыванный синусоидный ток, последуговой разрядный ток). Установки для определения возможностей. Применения к испытанию трансформаторов мощности, выключателей, коммутаторов. Интерференция в измерительных схемах. Расчетные приложения.

Книга предназначается для инженеров и техников работающих в области электротехники токов высокого напряжения.

In origineller Weise werden theoretische Fragen, Probleme im Zusammenhang mit der Berechnung, der Projektierung und der Nutzung von Wandlern — Messwiderstände und Spannungsteilern — mit weitgehenden Möglichkeiten zur Messung von Starkströmen bis zu 500 kA und Hochspannungen bis zu 10 MV über einen breiten Frequenzbereich behandelt.

Der Bau und die Arbeitsweise dieser Geräte werden theoretisch fundamentiert, und zwar auf Grund der Qualitätskriterien der automatischen Regeltechnik: Antwortzeit, Anstiegszeit, Frequenzband. Angesichts der großen Mannigfalt dieser Meßwandler wird eine klare Einteilung derselben vorgenommen, die dem Leser die Möglichkeit gibt, das für eine bestimmte Versuchs- oder Meßschaltung geeig-netste Gerät auszuwählen. Ferner wird die Rolle der Messwiderstände und Spannungsteiler in den elektrischen Versuchsschaltungen und ihr Zusammenwirken mit anderen Teilen der Schaltung beschrieben.

Das Buch faßt die bisherigen weltweiten Ergebnisse auf diesem Gebiet zusammen und enthält vor allem die Originalbeiträge der Autoren, die sich auf deren mehr als fünfzehnjährige Tätigkeit im Bereich der Messung von Starkströmen und Hochspannungen stützen. Diese Beiträge betreffen die Aufstellung neuer Rechenbeziehungen für die Anstiegszeit, den Ausgleich des Messwiderstände u.a., neue Versuchsmethoden und Eichanlagen für diese Wandler, den Bau zahlreicher Messwiderstände und Spannungsteiler, die teilweise den Gegenstand von Patenten bilden und in der rumänischen Elektroindustrie angewendet werden.

Aus dem Inhalt: Qualitätskriterien für Meßeinrichtungen (Rechteckerregung, Rampenerregung, Sinuserregung), Messwiderstände zur Messung von Starkströmen (Bifilarmesswiderstand, Koaxialmesswiderstand). Beispiele für den Bau von Koaxialmesswiderstände. Spannungsteiler (einfacher Bau und complexer Bau von Spannungsteileru unter Berücksichtigung der Verbreitung im Teiler). Beispiele für den Bau von Spannungsteilern. Frequenzspektren (Stufen-, Exponential-, Rampen, Standarstoss, Nachstrom, geschnittener Sinusstrom). Anlagen zur Ermittlung der Leistungen. Prüfung der Leistungstransformatoren, Abstellschalter und Stromrichter. Interferenz in den Meßschaltungen. Berechnungsanweisungen.

Das Buch ist für Ingenieure und Techniker nützlich, die in der Starkstromindustrie tätig sind.

P r e f a ț ă

Calitatea echipamentului electrotehnic constituie un factor hotărîtor în procesul creșterii industriale.

În acest sens verificarea performanțelor acestui echipament apare ca o necesitate de prim ordin. Este de la sine înțeles că, prin testarea echipamentului electrotehnic, în faza de elaborare a unui produs nou, de perfecționare a unui produs existent sau de verificare periodică a unui produs asimilat, se urmărește garantarea bunei funcționări în exploatare.

În faza de testare a echipamentului electrotehnic, înregistrarea regimurilor tranzitorii, ce presupun variații rapide de tensiuni și curenți, este necesară. Pentru măsurarea acestor mărimi electrice, convertoarele de uz general, de tipul reductoarelor de curent și de tensiune, nu oferă o soluție satisfăcătoare în ce privește banda de frecvență, timpul de răspuns, timpul de creștere și deci în ce privește comportarea în regim tranzitoriu.

De aceea autorii și-au propus să pună la dispoziția specialiștilor care proiectează, fabrică sau exploatează echipament electrotehnic, ca și studenților din facultățile de profil electric, cunoștințe despre convertoarele numite șunturi și divizoare de tensiune.

Aceste convertoare, care posedă proprietăți de natură a le face apte la măsurarea curenților și tensiunilor în regim tranzitoriu, sînt utilizate pe scară din ce în ce mai mare la încercarea echipamentului electrotehnic (întreruptoare, transformatoare, mutatoare, ș. a.), în laboratoare uzinale, în cercetare și în exploatare.

Autorii au considerat că este util, ca pe lîngă aspectele teoretice necesare justificării performanțelor șunturilor și divizoarelor de ten-

siune, să introducă pe cititor în construcția, tehnologia și utilizarea acestor tipuri de convertoare.

În mare măsură relațiile teoretice, soluțiile constructive și metodele experimentale, din care unele brevetate, reprezintă rezultatele activității directe a autorilor în domeniul dezvoltării de instrumente necesare testării echipamentului electrotehnic.

Autorii

C u p r i n s

1. Introducere 13

2. Criterii de apreciere a calității dispozitivelor de măsurare 16

2.1. Excitația treaptă 17
2.1.1. Timpul de răspuns 17
2.1.2. Un exemplu simplu 19
2.1.3. Semnificația fizică a timpului de răspuns 20
2.1.4. Excitația treaptă reprezintă o idealizare 21
2.1.5. Timpul de creștere 22
2.1.6. Alte criterii de calitate bazate pe răspunsul la excitația treaptă 23

2.2. Excitația rampă 24

2.3. Excitația sinusoidală 26
2.3.1. Metoda funcției de variabilă complexă 26
2.3.2. Metoda funcției de transfer 27

2.4. Relația de dependență 28
2.4.1. Relație între timpul de răspuns și funcția de transfer 29
2.4.2. Timpul de răspuns la sistemele cu defazaj minimal 30
2.4.3. Timpul de răspuns al cuadripolilor în lanț 31
2.4.4. Relația între timpul de creștere și banda de frecvență . . . 32
2.4.5. Timpul de creștere și banda de frecvență la un lanț de măsurare 35
2.4.6. Caracteristica de frecvență și răspunsul indicial 36

3. Șunturi pentru măsurarea curenților cu variații rapide 41

3.1. Șuntul bifilar 41
3.1.1. Răspunsul conductorului cilindric plin la excitația treaptă de curent 42
3.1.2. Supratensiuni pe rezistențele antiinductive 47

3.2. Șuntul coaxial 48
3.2.1. Soluția aproximativă a răspunsului la excitația treaptă de curent a conductorului tubular 50

3.2.2. Soluția exactă a răspunsului la excitația treaptă de curent a conductorului tubular 52
3.2.3. Comportarea instalației de măsurare în ansamblu 58
3.2.4. Compensarea schemei de măsurare care include un șunt cu pereți subțiri 66
3.2.5. Compensarea schemei de măsurare care include un șunt cu pereți groși 68
3.2.6. Elemente de proiectare 73

4. Divizoare de tensiune 83

4.1. Structura simplă a divizoarelor de tensiune 84
4.1.1. Divizorul capacitiv 84
4.1.2. Divizorul mixt, serie, *RC* 86
4.1.3. Divizorul mixt, paralel, *RC* 95
4.1.4. Divizorul rezistiv 98

4.2. Structura complexă a divizoarelor de tensiune 99
4.2.1. Divizorul mixt, serie, *RC* 100
4.2.2. Divizorul mixt, serie *RC*, simplificat 102
4.2.3. Divizorul rezistiv 103
4.2.4. Divizorul rezistiv, simplificat 104
4.2.5. Divizorul universal 106

4.3. Divizorul de tensiune în lanțul de măsurare 108
4.3.1. Unda reflectată. 110
4.3.2. Răspunsul indicial al lanțului de măsurare 111
4.3.3. Timpul de răspuns 114
4.3.4. Un model de calcul pentru timpul de răspuns 116
4.3.5. Cablul coaxial 120

4.4. Exemple de construcții 123
4.4.1. Divizor de tensiune rezistiv pentru 1,6 MV tensiune de impuls . . 124
4.4.2. Divizor mixt, serie *RC* pentru tensiunea alternativă de 20 kV_{ef} 133
4.4.3. Date suplimentare privind construcția divizoarelor de tensiune 136

5. Spectre de frecvență 138

6. Instalații pentru determinarea performanțelor 146

6.1. Producerea excitației treaptă la încercarea șunturilor coaxiale 146
6.2. Producerea excitației treaptă la încercarea divizoarelor de tensiune . . 149
6.3. Determinarea caracteristicei de frecvență a divizoarelor de tensiune . . 150
6.4. Determinarea timpului de creștere 152

7. Cîteva aplicații 154

7.1. Încercarea la impuls de tensiune a transformatoarelor 154
7.2. Măsurarea tensiunii de arc electric, a tensiunii de restabilire și a curentului postarc 156
7.3. Măsurarea curenților în circuitele mutatoarelor 159

8. Interferențe în circuitul de măsurare 161

8.1. Detectarea unei interferențe 161
8.2. Efectul trecerii unui curent de interferență prin ecranul cablului coaxial 162
8.3. Metode pentru eliminarea interferenței 164

Anexe 166

Bibliografie 203

Notaţii principale

i, u, e — valori instantanee
I, U, E — valori efective
$\hat{I}$, $\hat{U}$, $\hat{E}$ — valori de vîrf
$\underline{I}$, $\underline{U}$, $\underline{E}$ — fazori
$\mathbf{H}$ — intensitatea cîmpului magnetic, vector
$\mathbf{J}$ — densitatea de curent, vector
$\mathbf{E}$ — intensitatea cîmpului electric, vector
$\underline{u} = \hat{U}\, e^{j(\omega t + \varphi)}$ — reprezentare în complex nesimplificat
Z — impedanţa, modul
$\underline{Z}$ — impedanţa complexă
$\mathfrak{Z}$ — impedanţa operaţională
$\mathfrak{F}(p)$ — transformate Laplace (imagine)
$\mathfrak{L}^{-1}[\mathfrak{F}(p)]$ — transformata inversă Laplace (original)
$\mathcal{H}(p)$ — funcţia de transfer
$\mathcal{G}(p)$ — funcţia de transfer normată
$\underline{G}(j\omega)$ — răspunsul în frecvenţă
Re $[\underline{G}\ (j\omega)]$ — partea reală
Im $[\underline{G}\ (j\omega)]$ — partea imaginară
$f(t)$ — răspunsul indicial
$g(t)$ — funcţia pondere
T_r — timpul de răspuns
T_{cr} — timpul de creştere

1. Introducere

În tehnica măsurărilor există numeroase situații în care este necesar a se măsura mărimi electrice cu variații rapide în timp. De multe ori aceste mărimi au caracter singular, adică sînt nerepetitive. Astfel de mărimi electrice sînt caracterizate de prezența unui spectru de frecvență larg, în care frecvențe de ordinul MHz sînt prezente.

În același timp, mărimile electrice ce se măsoară ajung la valori extreme. Astfel, este uzual a se măsura tensiuni de ordinul kV sau MV și intensități de curent de ordinul zecilor de kA.

Traductoarele de măsurare uzuale — transformatoarele de tensiune și de curent — nu pot fi utilizate la măsurarea mărimilor electrice în regim tranzitoriu din cauză că ele reprezintă sisteme neliniare, care, în cele din urmă, limitează banda frecvențelor de trecere. Astfel, transformatoarele de curent au neajunsul de a nu transmite componenta de curent continuu a curentului de scurtcircuit și de a limita banda de frecvență numai la cîteva sute de Hz. Un transformator de tensiune nu poate fi utilizat la măsurarea tensiunii tranzitorii de restabilire a unui întreruptor de putere, iar un transformator de curent nu poate fi folosit la măsurarea capacității de conectare și de deconectare a întreruptorului. De asemenea, la măsurarea curenților și tensiunilor ce există în circuitele de comutație statică cu semiconductoare se exclude atît utilizarea transformatoarelor de măsură, cît și a șunturilor uzuale de curent continuu.

Drept consecință, pentru măsurarea mărimilor electrice cu variații rapide în timp este necesar a se utiliza dispozitive convertoare care să ofere, la ieșire, un semnal de măsură cît mai fidel față de semnalul de intrare. Asemenea dispozitive de măsură sînt șunturile coaxiale și divizoarele de tensiune. Pentru aceste dispozitive de măsurare, în vederea aprecierii preciziei măsurării, ideea con-

venţională a clasei de precizie nu mai are semnificaţie; noi criterii de apreciere a preciziei măsurării trebuie stabilite.

Progresele obţinute în domeniul teoriei sistemelor şi a reglajului automat, în ultimul timp, oferă noi posibilităţi de apreciere a calităţii dispozitivelor de măsurare. Acestea se consideră a fi sisteme liniare, pasive, iar proprietăţile lor decurg din analiza mărimilor de excitare a sistemului şi a răspunsului primit la excitaţia dată. În consecinţă, aprecierea calităţii unui dispozitiv de măsurare se face pe baza timpului de răspuns, a timpului de creştere, în cazul excitaţiei treaptă şi pe baza caracteristicii de frecvenţă, în cazul excitaţiei sinusoidale. În aprecierea răspunsului, indiferent dacă excitaţia este treaptă sau sinusoidală, un rol important îl are funcţia de transfer, care descrie convenabil proprietăţile dispozitivului de măsurare.

La măsurarea curenţilor intenşi, în regim tranzitoriu, cu ajutorul şuntului coaxial, acesta este solicitat termic şi electrodinamic, ceea ce constituie aspecte importante în calculele de dimensionare. Cu ajutorul unui şunt coaxial compensat se pot măsura curenţii postarc ce apar la deconectarea întreruptoarelor de putere, într-o bandă de frecvenţă de ordinul 1 MHz. Este necesar ca performanţele unui asemenea şunt să poată fi calculate teoretic şi verificate experimental printr-o metodă, ca de exemplu, a timpului de răspuns.

La măsurarea tensiunii oscilante de restabilire, a tensiunii de arc electric — fenomene ce apar la încercarea aparatelor de comutaţie — şi la încercarea cu impuls de tensiune a echipamentului electric, divizorul de tensiune este solicitat din punct de vedere dielectric, iar unele componente din punct de vedere termic. Şi la acest tip de măsurări, garanţia preciziei de măsurare se asigură prin încercarea divizorului de tensiune cu ajutorul unor instalaţii complexe, capabile să producă fie excitaţia treaptă de tensiune, fie o excitaţie sinusoidală de frecvenţă variabilă, în scopul determinării caracteristicii de frecvenţă.

Caracteristic tehnicii măsurărilor, în regim tranzitoriu, cu ajutorul şunturilor şi a divizoarelor de tensiune este faptul că asemenea măsurări se efectuează cu un pol al dispozitivului de măsurare conectat la pământ.

Dispozitivele de măsurare menţionate sînt plasate în staţii de încercări, laboratoare sau direct în reţele de înaltă sau joasă tensiune

Această așezare pune dispozitivele de măsurare sub influența unor cîmpuri electromagnetice, ce cauzează interferența semnalului util cu semnale perturbatoare. Metode și mijloace de a scoate semnalul util de sub interferența cîmpurilor electromagnetice externe sînt cu atît mai necesare cu cît aceste cîmpuri sînt mai intense.

Stăpînirea tehnicii măsurărilor mărimilor cu variații rapide presupune elucidarea teoretică a proceselor tranzitorii ce au loc în dispozitivele de măsurare folosite, ca și cunoștințe de tehnologie ce vizează realizarea practică a acestor dispozitive. De aceea, în lucrare, alături de calculații, care descriu cantitativ fenomene tranzitorii, se află și unele date constructive asupra șunturilor coaxiale și divizoarelor de tensiune, ca și scheme de montaj, utile în tehnica măsurărilor.

2. Criterii de apreciere a calității dispozitivelor de măsurare

Dispozitivul de măsurare fiind considerat un *sistem*, aprecierea calității lui se face pe baza *răspunsului* la o *excitație* dată. Răspunsul se mai numește și *semnal de ieșire*, iar excitația se mai numește și *semnal de intrare*. În fig. 2.1 se prezintă schematic un dispozitiv de măsurare *DM* privit ca sistem liniar, pasiv cu mărimile de intrare $a_i(t)$ și ieșire $a_e(t)$. Comportarea în regim tranzitoriu a unui asemenea sistem poate fi descrisă de relația generală

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} [a_e(t)] = \sum_{q=0}^{m} B_q \frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}t^q} [a_i(t)], \tag{2.1}$$

în care $m \leqslant n$.

Sub o formă generală, în regim tranzitoriu, se poate aprecia eroarea sistemului de măsurare, la un timp dat, cu relația

$$\varepsilon(t) = Ka_i(t) - a_e(t), \tag{2.2}$$

în care: $K = \left.\frac{a_e(t)}{a_i(t)}\right|_{t\to\infty} = \frac{a_{e\infty}}{a_{i\infty}}$.

Factorul K poate deveni adimensional numai dacă $a_i(t)$ și $a_e(t)$ sînt mărimi de aceeași natură.

Din punct de vedere aplicativ, în tehnica măsurărilor, importanță au următoarele tipuri de excitații:

a) *excitația treaptă*, căreia îi corespunde drept criteriu de calitate *timpul de răspuns* și *timpul de creștere*;

b) *excitația sinusoidală*, căreia îi corespunde, drept criteriu de calitate, *caracteristica de frecvență*.

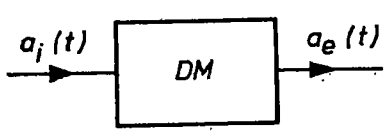


Fig. 2.1. Dispozitivul de măsurare ca sistem.

2.1. Excitația treaptă

La aplicarea exicitației treaptă la intrarea într-un sistem de măsurare, în relația (2.2) rezultă că:

— mărimea de intrare este nulă înainte de $t=0$ și are o valoare constantă pentru $t>0$, adică

$$a_i(t) = A_i; \tag{2.3}$$

— factorul de amplificare sau reducere este

$$K = \frac{a_e(t)}{a_i(t)}\bigg|_{t\to\infty} = \frac{a_{e\infty}}{A_i}; \tag{2.4}$$

— eroarea de măsurare, pentru fiecare valoare a lui $t>0$, este

$$\varepsilon(t) = a_{e\infty} - a_e(t), \tag{2.5}$$

adică diferența dintre valoarea stabilizată și cea curentă a răspunsului.

2.1.1. *Timpul de răspuns*

Timpul de răspuns, prin definiție, *este integrala extinsă la infinit a erorii* $\varepsilon(t)$, *raportată la valoarea stabilizată a mărimii la ieșirea din sistemul de măsurare*, adică

$$T_r = \frac{1}{a_{e\infty}} \int_0^\infty [a_e - a_e(t)]\,dt. \tag{2.6}$$

Dispozitivele de măsurare practice sînt sisteme fizice a căror mărime de ieșire, la timpul infinit de la inițierea excitației, capătă o valoare constantă, adică $a_{e\infty} = \text{const}$. În aceste condiții notînd *răspunsul indicial*, sau funcția indicială cu

$$f(t) = \frac{a_e(t)}{a_{e\infty}}, \tag{2.7}$$

expresia timpului de răspuns se mai poate scrie sub forma

$$T_r = \int_0^\infty [1 - f(t)]\,dt. \tag{2.8}$$

Calculul analitic al răspunsului indicial prezintă importante dificultăți în cazul dispozitivelor de măsurare cu o structură mai complexă. În principiu, funcția răspuns se calculează prin soluționarea ecuației (2.1) în raport cu mărimea de ieșire, utilizînd transformarea Laplace. Soluția în imagine se obține fără dificultate, dar adevărata dificultate apare la determinarea funcției original. Se poate ocoli această dificultate observînd că timpul de răspuns se mai poate calcula cu relația

$$T_r = -\mathcal{G}'(0), \tag{2.9}$$

în care $\mathcal{G}'(0)$ reprezintă derivata funcției de transfer normate

$$\mathcal{G}(0) = \lim_{p\to 0} \mathcal{G}(p). \tag{2.10}$$

Funcția de *transfer normată* $\mathcal{G}(p)$ rezultă din împărțirea funcției de transfer $\mathcal{H}(\mathrm{p})$ cu factorul de amplificare (sau reducere), adică

$$\mathcal{G}(\mathrm{p}) = \frac{\mathcal{H}(\mathrm{p})}{K} = \frac{\mathfrak{L}a_e(t)}{K\mathfrak{L}a_i(\mathrm{t})}. \tag{2.11}$$

Factorul K de amplificare (sau reducere) se determină cu expresia

$$K = \mathcal{H}(0) = \lim_{p\to 0} \mathcal{H}(\mathrm{p}),$$

cu condiția ca această limită să aibă o valoare finită.

În adevăr, $\mathcal{H}(\mathrm{p})$ conține atît caracteristica amplitudine-frecvență, cît și caracteristica fază-frecvență. Dacă $\mathrm{p}\to 0$ și $(\omega = 2\pi f)\to 0$, deci $\mathcal{H}(0)$ reprezintă amplitudinea lui $\mathcal{H}(\mathrm{p})$ pentru $f\to 0$. În acest caz $\lim_{p\to 0} \mathcal{G}(\mathrm{p}) = 1$, în acord cu relația (2.13).

La rezultatul dat de relația (2.9) se ajunge prin scrierea ecuației timpului de răspuns (2.6) sub forma

$$T_r = -\frac{1}{KA_i}\int_0^\infty [a_e(t) - KA_i]\,\mathrm{d}t. \tag{2.12}$$

Integrantul din relația (2.12) se aduce la o formă convenabilă, prin transformări succesive, după cum urmează:

$$I = \int_0^\infty [a_e(t) - KA_i]\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,[a_e(t) - KA_i]\,\mathrm{d}t.$$

Cu notaţiile :

$$\mathfrak{L}a_e(t) = \mathcal{A}_e(\mathrm{p}) ; \ \mathfrak{L}KA_i = \frac{KA_i}{\mathrm{p}},$$

se obţine

$$I = \lim_{p\to 0}\left[\mathcal{A}_e(\mathrm{p}) - \frac{KA_i}{\mathrm{p}}\right] = \lim_{p\to 0} KA_i\left[\frac{\mathcal{A}_e(\mathrm{p})}{KA_i} - \frac{1}{\mathrm{p}}\right].$$

Dacă se observă că

$$\frac{\mathcal{A}_e(p)}{KA_i} = \frac{\mathcal{G}(\mathrm{p})}{\mathrm{p}} \quad \text{şi că} \quad \mathcal{G}(0) = 1,$$

integrantul devine

$$I = KA_i \lim_{p\to 0} \frac{\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(0)}{p} = KA_i\mathcal{G}'(0).$$

Se constată, că $\mathcal{G}(0)=1$ prin următorul raţionament, ţinînd seama şi de relaţia (2.4),

$$a_{e\infty} = \lim_{t\to\infty} a_e(t) = \lim_{p\to 0} \mathrm{p}\mathcal{A}_e(\mathrm{p}) = KA_i \lim_{p\to 0} \mathcal{G}(p) = KA_i. \qquad (2.13)$$

Expresia (2.13) introdusă în relaţia (2.12) conduce la relaţia (2.9).

2.1.2. *Un exemplu simplu*

Pentru sistemul de măsurare din fig. 2.2 format din inductivitatea L şi rezistenţa R, se cere să se determine timpul de răspuns la excitaţia treaptă. Mărimea de intrare este $a_i = U$, mărimea de ieşire este $a_e = u = Ri$, unde i este curentul care trece prin circuit la aplicarea excitaţiei treaptă. Constanta de timp a circuitului este $T = L/R$. Tensiunea la ieşire este

$$u = Ri = U(1 - \mathrm{e}^{-t/T}). \qquad (2.14)$$

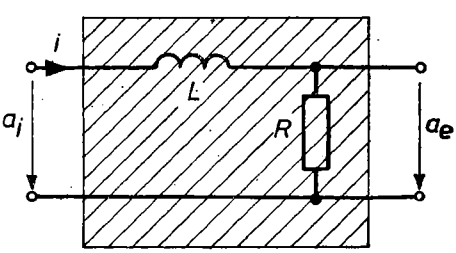


Fig. 2.2. Un exemplu simplu de sistem de măsurare.

Timpul de răspuns se calculează cu ajutorul relației (2.8)

$$T_r = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-t/T})]\, dt = T = L/R.$$

Același timp de răspuns se obține cu ajutorul relației (2.9)

$$\mathcal{H}(p) = \frac{\mathfrak{L}[U(1 - e^{-t/T})]}{\mathfrak{L}U} = \frac{1}{1 + pT}.$$

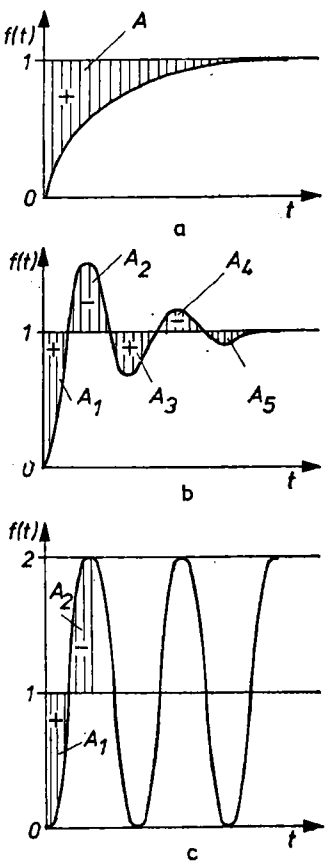


Fig. 2.3. Tipuri reprezentative de funcții indiciale:

a – răspuns aperiodic; *b* – răspuns oscilant amortizat; *c* – răspuns oscilant neamortizat.

Factorul de amplificare $K = 1$, și deci $\mathcal{H}(p) = \mathcal{G}(p)$; rezultă astfel

$$T_r = -\lim_{p \to 0} \mathcal{G}'(p) = -\left.\frac{-T}{(1 + pT)^2}\right|_{p \to 0} = T.$$

Se observă deci că, în cazul în care răspunsul este o funcție exponențială, timpul de răspuns este egal cu constanta de timp a sistemului.

2.1.3. *Semnificația fizică a timpului de răspuns*

În fig. 2.3 se prezintă trei tipuri reprezentative de răspunsuri la excitația treaptă pentru un sistem de măsurare descris de o ecuație diferențială de ordinul doi. Pentru răspunsul indicial de tip *aperiodic*, din fig. 2.3 *a*, timpul de răspuns este pozitiv și reprezintă aria hașurată A, sub ordonata 1.

Pentru răspunsul indicial de tip *oscilant amortizat*, din fig. 2.3, *b*, timpul de răspuns este dat de suma algebrică a ariilor de sub și deasupra ordonatei 1, adică

$$T_r = \sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5. \qquad (2.15)$$

Pentru răspunsul indicial de tip *oscilant neamortizat*, din fig. 2.3, *c*, se

constată că timpul de răspuns este zero, deoarece aria pozitivă A_1 se compensează cu aria negativă A_2 ș. a. m. d.

Cum calitatea unui dispozitiv de măsurare se apreciază după valoarea timpului de răspuns, care din punct de vedere dimensional este un timp, rezultă că *un dispozitiv de măsurare este de calitate cu atît mai bună cu cît timpul de răspuns este mai mic.* Acest raționament este valabil pentru răspunsul de tipul prezentat în fig. 2.3, *a*, în care unui timp de răspuns redus îi corespunde o arie A mică, adică în valori instantanee semnalul de ieșire se apropie de cel de intrare.

Aprecierea calității unui dispozitiv de măsurare, după criteriul timpului de răspuns, dacă răspunsul este de tipul *oscilant amortizat*, ca în fig. 2.3, *b* sau *oscilant neamortizat*, ca în fig. 2.3, *c*, *nu are sens.* În adevăr, timpul de răspuns al unui dispozitiv de măsurare cu răspunsul indicial din fig. 2.3, *c* are valoarea zero, dar este clar că acest dispozitiv de măsurare prezintă, la ieșire, un semnal puternic deformat față de cel de la intrare. În tehnica încercărilor experimentale se poate admite, în vederea stabilirii timpului de răspuns, și un răspuns *oscilant puternic amortizat*, caz în care oscilația să nu depășească (spre exemplu) 0,05 din valoarea stabilizată.

2.1.4. *Excitația treaptă reprezintă o idealizare*

În tehnica experimentală, semnalul treaptă aplicat la intrarea în dispozitivul de măsurare este de fapt o rampă, ca în fig. 2.4, unde amplitudinea unitară este atinsă după timpul τ. La dispozitive realizate, timpul τ variază între 0,1 și 10 ns, în funcție de calitatea dispozitivului și scopul urmărit în experimentare. Dacă timpul de răspuns intrinsec al sistemului este, de exemplu, cu două ordine de mărime mai mare decît timpul τ al rampei, în aprecierea timpului de răspuns al dispozitivului de măsură nu apar erori mari. Dacă dimpotrivă timpul de răspuns intrinsec este comparabil cu timpul τ al rampei este necesară o corecție [13].

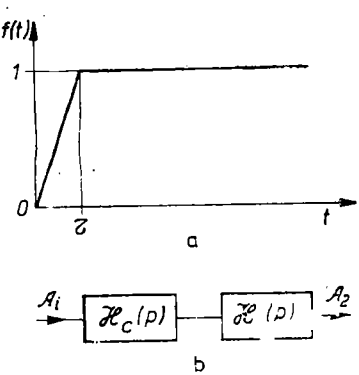


Fig. 2.4. Un semnal rampă :
a — diagrama semnalului; *b* — două sisteme în serie.

Timpul de răspuns măsurat pe o oscilogramă obținută la un sistem excitat cu *rampă*, ca în fig. 2.4, este evident mai mare decît timpul de răs-

puns intrinsec, care s-ar obține prin excitația treaptă. În condiția excitației rampă, sistemul de măsurare, care include și generatorul de excitație, are o funcție de transfer echivalentă de forma

$$\mathcal{H}_e(p) = \mathcal{H}_c(p) \cdot \mathcal{H}(p), \tag{2.16}$$

unde $\mathcal{H}(p)$ este funcția de transfer intrinsecă a sistemului și $\mathcal{H}_c(p)$ este o funcție de transfer de corecție, care are ca expresie

$$\mathcal{H}_c(p) = \frac{1 - e^{-p\tau}}{\tau p}. \tag{2.17}$$

Demonstrațiile relațiilor (2.16) și (2.17) sînt date în anexa 9.1.

Utilizînd o teoremă din teoria reglajului automat, prin care se arată că funcția de transfer a două sisteme în lanț este egală cu produsul funcțiilor de transfer, iar timpul de răspuns al celor două sisteme în lanț este egal cu suma timpilor de răspuns, în condiții restrictive [21], se poate determina timpul de răspuns intrinsec din măsurarea timpului de răspuns pe oscilograma obținută la excitația sistemului cu o rampă cunoscută. Din relația (2.17) se calculează timpul de răspuns al sistemului care are funcția de transfer $\mathcal{H}_c(p)$ și se obține $T_{rc} = \tau/2$. În practica măsurărilor, acest timp se scade din timpul de răspuns măsurat pe o oscilogramă, pentru a obține timpul de răspuns intrinsec al sistemului de măsurare.

Notă. Intuitiv, se observă că dispozitivul de producerea rampei poate fi considerat ca fiind un sistem excitat cu semnalul treaptă și care are drept răspuns semnalul rampă; din fig. 2.4, *a* se observă direct că timpul de răspuns al acestui sistem este $\tau/2$.

2.1.5. *Timpul de creștere*

Timpul de creștere reprezintă un criteriu de calitate pentru un dispozitiv de măsurare, în cazul în care se cunoaște răspunsul la excitația treaptă și în cazul în care acest răspuns este de tip aperiodic, ca în fig. 2.5. Timpul de creștere este timpul necesar creșterii răspunsului indicial de la valoarea 0,1 la valoarea 0,9.

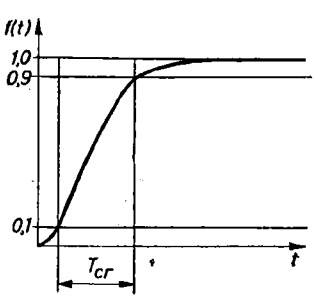


Fig. 2.5. Relativ la definiția timpului de creștere.

Avantajul de a cunoaște timpul de creștere al unui dispozitiv de măsurare constă în aceea că nu este necesar a preciza origina timpului pentru răspunsu indicial, cum este necesar în cazul determinării timpului de răspuns, ca în fig. 2.3. Înregistrarea fenomenelor ultrarapide se

face cu ajutorul oscilografelor de tip sincroscop, la care fenomenul declanşează baza de timp, înainte ca el să apară pe ecran. Dificultăţi mari apar, folosind această tehnică de înregistrare, la precizarea originii timpului mai ales pentru răspunsuri caracterizate prin valoarea zero, în origine, a fenomenului cercetat. Pentru oscilografele moderne se dau valori atît pentru banda de fecvenţă cît şi pentru timpul de creştere.

2.1.6. *Alte criterii de calitate bazate pe răspunsul la excitaţia treaptă*

În afară de criteriul timpului de răspuns şi al timpului de creştere s-au mai propus [22] şi alte criterii de calitate urmărindu-se să se sensibilizeze prezenţa erorii ca durată, ca valoare absolută, ca semn, ca amortizare. Cu toate că în *tehnica măsurătorilor curente* a fenomenelor cu variaţii rapide aceste criterii sînt mai puţin utilizate, o prezentare a acestor criterii poate trezi interes pentru aplicaţii în cazuri speciale.

Criteriul timpului de răspuns ponderat. Acesta este definit de relaţia

$$T_{rp} = \frac{1}{a_{e\infty}} \int_0^\infty \varepsilon(t) \cdot t \cdot \mathrm{d}t = \int_0^\infty [1 - f(t)] \cdot t \cdot \mathrm{d}t. \tag{2.18}$$

Acest criteriu sensibilizează efectul duratei erorii, adică valoarea T_{rp} rezultă cu atît mai mare cu cît eroarea se menţine mai mult timp. Din punct de vedere dimensional T_{rp} reprezintă un timp la pătrat. Criteriul (2.18) prezintă interes pentru răspunsuri de tip aperiodic şi este neconcludent în cazul răspunsurilor puţin amortizate cînd se pot obţine valori reduse ale timpului de răspuns ponderat.

Criteriul valorii absolute a timpului de răspuns. Acest criteriu este definit de relaţia

$$T_{ra} = \frac{1}{a_{e\infty}} \int_0^\infty |\, \varepsilon(t)|\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty |\, [1 - f(t)]\,|\, \mathrm{d}t \tag{2.19}$$

şi scoate în evidenţă amortizarea răspunsului. În acest caz, pentru un răspuns oscilant de tipul celui din fig. 2.3, *b*, valoarea absolută a timpului de răspuns este sensibil mai mare decît valoarea timpului de răspuns din relaţia (2.6), iar în fig. 2.3, *b*, rezultă a fi suma ariilor, adică $T_{ra} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots$

Criteriul erorii pătratice este potrivit pentru a scoate în evidenţă prezenţa oscilaţiilor. Acest criteriu are drept expresie

$$T_{\tau\varepsilon^2} = \int_0^\infty [\varepsilon(t)]^2 \cdot \mathrm{d}t = \int_0^\infty [1 - f(t)]^2 \mathrm{d}t. \tag{2.20}$$

Erorile pozitive ca şi cele negative sînt ridicate la pătrat şi de aceea aportul ultimelor oscilaţii nu iese în evidenţă. Ca urmare, la folosirea acestui criteriu, iese în evidenţă rapiditatea răspunsului în detrimentul amortizării.

Criteriul timpului de răspuns ponderat absolut are drept expresie

$$T_{rpa} = \int_0^\infty |\varepsilon(t)| \cdot t \cdot \mathrm{d}t = \int_0^8 |[1 - f(t)]| \cdot t \cdot \mathrm{d}t \tag{2.21}$$

şi evidenţiază gradul de amortizare în mod mai pregnant decît alte criterii, deoarece se efectuează integrala în timp a produsului între valoarea absolută a erorii şi timp.

2.2. Excitaţia rampă

La încercarea dispozitivelor de măsurare-divizoare de tensiune — pentru determinarea timpului de răspuns este dificil de generat excitaţia treaptă de tensiune şi de aceea se preferă a se încerca dispozitivul excitîndu-l cu un semnal rampă, desenat în fig. 2.6, şi care are expresia

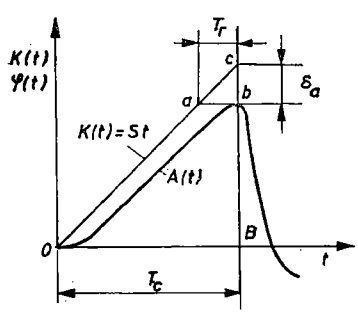


Fig. 2.6. Excitaţia rampă.

$$K(t) = St, \quad 0 < t < T_c; \qquad K(t) = 0, \quad t < 0; \quad t > T_c. \tag{2.22}$$

Acest semnal este tăiat la timpul T_c. Răspunsul dispozitivului de măsurare la această excitaţie este notat cu $A(t)$.

Pe fig. 2.6, printr-o construcţie geometrică simplă — se duce o paralelă cu axa timpului din maximul răs-

punsului $A(t)$ pînă la intersecția cu $K(t)$ — se poate determina timpul de răspuns T_r corespunzător excitației treaptă. Din eroarea relativă δ_a se poate deduce timpul de răspuns T_r la excitația treaptă cu relația

$$T_r = \delta_{ar} T_c. \tag{2.23}$$

În adevăr, dacă $f(t)$ este răspunsul indicial la excitația treaptă, cu ajutorul integralei Duhamel scrisă sub forma

$$A(t) = K(0)f(t) + \int_0^t K'(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.24}$$

unde $K'(t-\tau) = K'(t) = S$, se obține răspunsul la excitația rampă

$$A(t) = S\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Eroarea relativă, în momentul T_c al tăierii undei, este dată de expresia

$$\delta_{ar} = \frac{ST_c - S\int_0^{T_c} f(\tau)\mathrm{d}\tau}{ST_c} = \frac{\int_0^{T_c}[1-f(\tau)]\,\mathrm{d}\tau}{T_c}. \tag{2.25}$$

În practica experimentală, oscilațiile răspunsului indicial $f(t)$ se amortizează înaintea timpului de tăiere T_c astfel că se poate scrie

$$\int_0^{\infty}[1-f(\tau)]\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{T_c}[1-f(\tau)]\,\mathrm{d}\tau = T_r \tag{2.26}$$

și ca urmare din relația (2.25) se obține relația (2.23) pentru timpul de răspuns. Din triunghiurile asemenea abc și OcB rezultă:

$$\overline{ab} = \overline{OB}\cdot\overline{cb}/\overline{cB} = T_c S T_r/(ST_c) = T_r,$$

ceea ce este identic cu relația (2.23).

2.3. Excitația sinusoidală

Criteriul răspunsului unui dispozitiv de măsurare la o excitație sinusoidală de frecvență variabilă oferă, uneori, informații mai concludente, mai ales pentru sistemele oscilante, decît criteriul timpului de răspuns la excitația treaptă. Răspunsul la excitația sinusoidală de frecvență variabilă se numește și *caracteristica de frecvență* și include *amplitudinea* și *faza* semnalului răspuns. În acest scop, pentru fiecare frecvență, respectiv pulsație ω_k, este necesar a se cunoaște amplitudinea semnalului de intrare X_{ik}, amplitudinea semnalului de ieșire X_{ek} și defazajul φ_k între semnalul de ieșire și cel de intrare, după cum se vede în fig. 2.7.

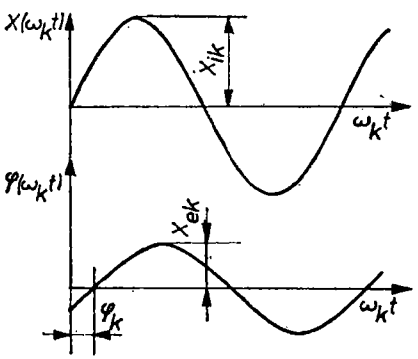


Fig. 2.7. Relativ la caracteristica de frecvență.

Una din metodele directe, dar incomode, de a determina caracteristica de frecvență, constă în a rezolva ecuația diferențială ce descrie sistemul de măsurare. Spre exemplu, dacă ecuația (2.1) se restrînge la o ecuație diferențială de ordinul doi de forma

$$a\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + cu = au_0, \tag{2.27}$$

este necesar a se afla variabila u_k pentru pulsația ω_k. În cazurile practice, nu se rezolvă ecuația diferențială, ci se recurge la metoda funcției de variabilă complexă sau la metoda funcției de transfer.

2.3.1. *Metoda funcției de variabilă complexă*

Dacă dispozitivul de măsurare este un sistem liniar și pasiv, se demonstrează [21] că răspunsul va fi tot o mărime sinusoidală. Dacă excitația u_0 din relația (2.27) este de formă sinusoidală, adică dacă

$$u_0 = \hat{U}_0 \sin \omega_k t \quad \text{sau} \quad \underline{u}_0 = \hat{U}_0 e^{j\omega_k t}, \tag{2.28a}$$

răspunsul va fi de forma

$$u_k = \hat{U}_k \sin(\omega_k t + \varphi) \quad \text{sau} \quad \underline{u}_k = \hat{U}_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}. \tag{2.28b}$$

Cu expresiile pentru $\underline{u}_0$ și $\underline{u}_k$ introduse în (2.27) scrisă sub formă complexă se obține

$$\frac{\hat{U}_k}{\hat{U}_0} e^{j\varphi_k} = \frac{1}{(j\omega_k)^2 + \frac{b}{a} j\omega_k + \frac{c}{a}}. \tag{2.29}$$

Amplitudinea U_0 se menține constantă la orice pulsație; se constată însă că raportul amplitudinilor $\hat{U}_k/\hat{U}_0$ ca și unghiul de defazaj φ_k depind de pulsația ω_k. Partea dreaptă a relației (2.29) este o funcție de variabilă complexă de forma $\alpha_k + j\beta_k$. Raportul între modulele de ieșire și intrare este $\hat{U}_k/\hat{U}_0 = \sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}$. Defazajul între semnalul de ieșire și cel de intrare rezultă tg $\varphi_k = \beta_k/\alpha_k$.

2.3.2. *Metoda funcției de transfer*

Utilizarea funcției de transfer oferă o cale rapidă și comodă pentru determinarea caracteristicii de frecvență a unui dispozitiv de măsurare, cu condiția ca el să reprezinte un sistem liniar. Prin aplicarea transformatei Laplace ecuației generale (2.1) și *cu condiții inițiale nule*, pentru imaginea mărimii de ieșire se obține

$$\mathcal{A}_e(p) = \frac{\sum_{q=0}^{m} B_q p^q}{\sum_{k=0}^{n} A_k p^k} \mathcal{A}_i(p), \tag{2.30}$$

cu notațiile $\mathcal{L}a_e(t) = \mathcal{A}_e(p)$ și $\mathcal{L}a_i(t) = \mathcal{A}_i(p)$.

Funcția de transfer a dispozitivului de măsurare descrie comportarea dinamică a sistemului și are ca expresie

$$\mathcal{H}(p) = \frac{\sum_{q=0}^{m} B_q p^q}{\sum_{k=0}^{n} A_k p^k} = \frac{\mathcal{R}(p)}{\mathcal{S}(p)}. \tag{2.31}$$

Pentru valori nule ale mărimilor de intrare și ieșire, la $t>0$, tansformatele Laplace și Fourier sînt echivalente, iar p ia numai valori imaginare, adică $p=j\omega$. În aceste condiții, caracteristica de frecvență este descrisă de ecuația

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{B_m(j\omega)^m + \ldots + B_0}{A_n(j\omega)^n + \ldots + A_0} \tag{2.32}$$

sau după separarea modulului și argumentului

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}. \tag{2.33}$$

Caracteristica de frecvență este descrisă, ca modul și fază, cu ajutorul caracteristicilor logaritmice a lui Bode sau a locului de transfer a lui Nyquist [21].

Funcțiile de transfer corespunzătoare dispozitivelor de măsurare, cum sînt divizoarele de tensiune, nu conțin zerouri cu parte reală pozitivă, deci satisfac condițiile unui sistem cu *defazaj minimal*, condiții stabilite de Bode [6]. Ca urmare, astfel de dispozitive de măsurare sînt definite complet numai prin *caracteristica de frecvență a amplitudinii*. Pentru cazurile practice, se definește o bandă de frecvență a dispozitivului de măsurare pentru care atenuarea amplitudinii mărimii la ieșire nu depășește un număr dat de dB, în mod uzual 3 dB, adică

$$20 \log \frac{H(\omega_k)}{H(\omega_0)} = 3 \text{ dB}, \tag{2.34}$$

unde: $H(\omega_k)$ este amplitudinea corespunzătoare pulsației ω_k, iar $H(\omega_0)$ este amplitudinea corespunzătoare unei pulsații de referință, spre exemplu $\omega=0$, adică pentru curent continuu.

Una din expresiile prin care se stabilește dependența între faza $\varphi(\omega_c)$ la o pulsație ω_c, și caracteristica de frecvență a amplitudinii $H(\omega)$, dată de Bode pentru sistemele cu defazaj minimal este

$$\varphi(\omega_c) = \frac{2\omega_c}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln H(\omega) - \ln H(\omega_c)}{\omega^2 - \omega_c^2} \, d\omega. \tag{2.35}$$

2.4. Relația de dependență

Funcția de transfer a unui dispozitiv de măsurare descrie comportarea dinamică a dispozitivului și de aceea, cu ajutorul ei se stabilesc atît criterii de calitate, cît și relații de dependență între aceste criterii. Relația (2.9) stabilește dependența între timpul de răspuns T_r și funcția de transfer normată $\mathcal{G}(p)$.

Aceeaşi relaţie (2.9) poate fi transferată, pe baza echivalenţei tansformatelor Laplace şi Fourier în condiţii iniţiale nule, în domeniul caracteristicii de frecvenţă; se poate deci scrie

$$T_r = -\left.\frac{\mathrm{d}\underline{G}(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}(\mathrm{j}\omega)}\right|_{\omega\to 0} = -\underset{\omega\to 0}{\underline{G}'(\mathrm{j}\omega)} \tag{2.36}$$

cu $\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\underline{H}(\mathrm{j}\omega)}{K}$.

2.4.1. *Relaţie între timpul de răspuns şi funcţia de transfer*

Transformata Laplace mai poate fi definită ca produsul între funcţia de transfer $\mathcal{H}(\mathrm{p})$ şi transformata Laplace a excitaţiei $\mathcal{A}_i(\mathrm{p})$, adică

$$\mathcal{A}_e(\mathrm{p}) = \mathcal{H}(p)\mathcal{A}_i(p). \tag{2.37}$$

Prin aplicarea relaţiei (2.37) răspunsului indicial $f(t)$ şi ţinînd seama de definiţia formală a transformării Laplace, se obţine

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{p}t}\cdot \mathrm{d}t = \frac{\mathcal{G}(p)}{\mathrm{p}}. \tag{2.38}$$

Transformatei Laplace (2.38) îi corespunde, pentru condiţii iniţiale nule, transformata Fourier

$$\int_0^\infty \underline{F}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{\underline{G}(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}. \tag{2.39}$$

Pe de altă parte, răspunsul indicial $f(t)$ se obţine prin transformata Fourier inversă

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\underline{G}(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \tag{2.40}$$

Spectrul de frecvenţă al excitaţiei treaptă (v. cap. 5) este $1/\mathrm{j}\omega$. Se poate deci exprima *spectrul diferenţă* între spectrul funcţiei excitaţia treaptă şi funcţia răspuns indicial

$$\underline{g}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega} - \frac{\underline{G}(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}[1 - \underline{G}(\mathrm{j}\omega)]. \tag{2.41}$$

Același *spectru diferență* se poate obține direct cu transformata Fourier

$$\underline{g}(\mathrm{j}\omega) = \int_0^\infty [1 - f(t)]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, \mathrm{d}t. \tag{2.42}$$

În această relație se observă că

$$\lim_{\omega \to 0} \underline{g}(\mathrm{j}\omega) = \int_0^\infty [1 - f(t)]\, \mathrm{d}t = T_r. \tag{2.43}$$

Din relațiile (2.41) și (2.43) rezultă

$$T_r = \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{\mathrm{j}\omega} [1 - \underline{G}(j\omega)]. \tag{2.44}$$

Prin urmare, timpul de răspuns se obține direct din funcția de transfer normată, fără derivare. O examinare mai atentă a relației (2.44) arată, că aceasta este echivalentă cu relația (2.36), deoarece $1 = \lim_{\omega \to 0} \underline{G}(\mathrm{j}\omega)$, cum se arată la § 2.1.1.

2.4.2. *Timpul de răspuns la sistemele cu defazaj minimal*

Funcția de transfer $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$ se dezvoltă în serie Mac-Laurin în jurul $\mathrm{j}\omega = 0$

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \underset{\mathrm{j}\omega \to 0}{\underline{G}(\mathrm{j}\omega)} + \underset{\mathrm{j}\omega \to 0}{\frac{\mathrm{d}\underline{G}(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}(\mathrm{j}\omega)}}\, \mathrm{j}\omega + \underset{\mathrm{j}\omega \to 0}{\frac{\mathrm{d}^2\underline{G}(\mathrm{j}\omega)}{2\,!\,\mathrm{d}(\mathrm{j}\omega)^2}}\, (\mathrm{j}\omega)^2 + \ldots, \tag{2.45}$$

de unde rezultă

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = 1 + A\mathrm{j}\omega + B(\mathrm{j}\omega)^2 + \ldots \tag{2.46}$$

cu

$$A = \underset{\mathrm{j}\omega \to 0}{\frac{\mathrm{d}\underline{G}(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}(\mathrm{j}\omega)}}\,; \quad B = \underset{\mathrm{j}\omega \to 0}{\frac{\mathrm{d}^2\underline{G}(\mathrm{j}\omega)}{2\,!\,\mathrm{d}(\mathrm{j}\omega)^2}}\,; \ldots.$$

Expresia (2.46), limitată la primii doi termeni, introdusă în relația (2.41) conduce din nou la expresia timpului de răspuns, dată de relația (2.36), ceea ce este echivalent cu

$$T_r = -A. \tag{2.47}$$

În cazul pulsației ω, extrem de mică, corespunzînd condiției $j\omega \to 0$, funcția de transfer normată se scrie, în acord cu relația (2.46),

$$\underline{G}(j\omega) = 1 + Aj\omega, \tag{2.48}$$

de unde rezultă defazajul $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi = A\omega$ sau $A = d\varphi/d\omega$, ceea ce conduce, ținînd seama de (2.47), la

$$T_r = -\left.\frac{d\varphi}{d\omega}\right|_{\omega \to 0}. \tag{2.49}$$

Adică timpul de răspuns este dat de derivata, cu semnul minus, a unghiului de defazaj în raport cu pulsația, cînd aceasta tinde către zero. Această observație oferă posibilitatea de a determina timpul de răspuns al dispozitivelor de măsurare caracterizate prin defazaj minimal, cu ajutorul caracteristicii amplitudine $G(\omega) = \frac{H(\omega)}{K}$. În adevăr, din relația (2.35) se obține

$$-\left.\frac{d\varphi(\omega_c)}{d\omega_c}\right|_{\omega_c \to 0} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln G(\omega)}{\omega^2}\, d\omega = T_r. \tag{2.50}$$

2.4.3. *Timpul de răspuns al cuadripolilor în lanț*

Sistemele de măsurare reale reprezintă lanțuri de cuadripoli, ieșirea unuia fiind conectată la intrarea următorului. Spre exemplu, la măsurarea curentului cu ajutorul unui șunt coaxial se consideră cuadripolii corespunzători șuntului, cablului de măsurare și osciloscopului catodic. Cum s-a enunțat în § 2.1.5, timpul de răspuns al întregului sistem în lanț este egal cu suma timpilor de răspuns ai cuadripolilor individuali. Dacă cuadripolii nu se interinfluențează, adică dacă sînt necuplați între ei, funcția de transfer rezultantă este

$$\underline{G}_t(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} \underline{G}_i(j\omega). \tag{2.51}$$

Timpul de răspuns al întregului sistem se calculează cu relația (2.45), deci

$$T_{rt} = -\left.\frac{d\underline{G}_t(j\omega)}{d(j\omega)}\right|_{j\omega \to 0} = -\left[\frac{d\underline{G}_1(j\omega)}{d(j\omega)}\underline{G}_2(j\omega)\cdot\underline{G}_3(j\omega) + \ldots + \frac{d\underline{G}_2(j\omega)}{d(j\omega)}\underline{G}_1(j\omega)\cdot\underline{G}_3(j\omega) + \ldots\right]_{j\omega \to 0}.$$

Cum $\underline{G}_1(j\omega)$, $\underline{G}_2(j\omega)$ pentru $j\omega \to 0$ iau valori egale cu unitatea, rezultă

$$T_{rt} = T_{r1} + T_{r2} + T_{r3} + \ldots \cdot \tag{2.52}$$

2.4.4. *Relaţia între timpul de creştere şi banda de frecvenţă*

Stabilirea unei astfel de relaţii se poate face, pe cale analitică, numai pentru dispozitive de măsurare a căror răspuns indicial poate fi calculat cunoscînd funcţia de transfer, care satisface condiţia de defazaj minim şi chiar mai mult, de *defazaj nul.*

Majoritatea dispozitivelor de măsurare destinate a măsura mărimi electrice cu variaţii rapide, cum sînt şunturile coaxiale compensate ca şi divizoarele de tensiune compensate şi amortizate, au o caracteristică de frecvenţă de tip continuu şi neted scăzător. O aproximaţie bună a acestui răspuns se poate face cu ajutorul *funcţiei Gauss*, a erorilor [67]. În acest caz, în expresia funcţiei de transfer normată, conform relaţiei (2.33), se introduc valorile pentru modul şi defazaj în funcţie de frecvenţa f, după cum urmează :

$$\underline{G}(j\omega) = e^{-k^2 f^2} e^{-j2\pi f t_0}. \tag{2.53}$$

Pentru ca funcţia de transfer să admită defazaj nul există două *posibilităţi teoretice* :

a) $t_0 \to \infty$, adică timpul mort al sistemului să fie infinit, ceea ce pentru un dispozitiv de măsură nu are sens ;

b) funcţia de transfer $\underline{G}(j\omega)$ corespunde unui sistem *compensabil* sau *invertibil.* O clasificare a funcţiilor de transfer după poziţia polilor şi a zerourilor în planul complex $p = \sigma + j\omega$ este dată de anexa 9.2.

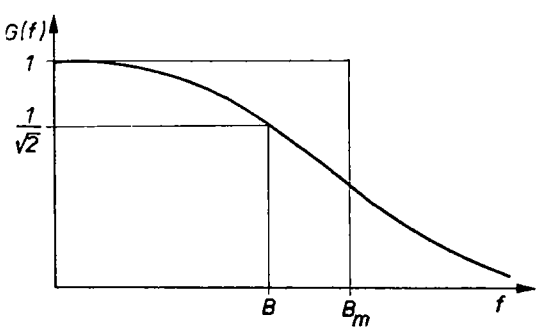


Fig. 2.8. Relativ la banda de frecvenţă.

În cele ce urmează, se va considera că în expresia funcţiei de transfer nu intră factorul de defazaj şi deci expresia funcţiei de transfer este

$$\underline{G}(j\omega) = G(f) = e^{-k^2 f^2}. \tag{2.54}$$

Caracteristica de frecvenţă (în amplitudine) a acestei funcţii este de tipul celei desenate în fig. 2.8 şi

este caracterizată prin banda de trecre B, pentru care atenuarea este de 3 dB, adică la care $G(f)=1/\sqrt{2}$ la $f=B$. Determinarea factorului k^2 din expresia (2.54) se face tocmai pe baza acestui considerent

$$e^{-k^2B^2} = 1/\sqrt{2} \tag{2.55}$$

sau

$$k^2 = \frac{\ln\sqrt{2}}{B^2}.$$

Banda medie de trecere B_m este definită ca

$$B_m = \int_0^\infty G(f)\mathrm{d}f. \tag{2.56}$$

Se ține seama [60] că $\int_0^\infty e^{-q^2x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/(2q)$ și se obține legătura între B_m și B.

$$B_m = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\ln\sqrt{2}}{B^2}f^2\right)\mathrm{d}f = \frac{\sqrt{\pi}\,B}{2\sqrt{\ln\sqrt{2}}} = 1{,}5053\ B. \tag{2.57}$$

Răspunsul indicial $f(t)$ se calculează cu ajutorul funcției de transfer din relația (2.54)

$$f(t) = 4\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^\infty e^{-k^2f^2}\cos(2\pi tf)\,\mathrm{d}f. \tag{2.58}$$

Această relație este demonstrată în anexa 3. Pentru a explicita relația (2.58) se face schimbarea de variabilă

$$\tau = \frac{\pi}{k}\,t \tag{2.59}$$

și se ține seamă [3] că

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-n^2/4a^2}. \tag{2.60}$$

Se obține astfel

$$f(\tau) = \Phi(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau \tag{2.61}$$

unde $\Phi(\tau)$ este funcția erorilor care se află tabelată în [40] și este reprezentată în fig. 2.9. Valorile 0,1 și respectiv 0,9 ale funcției $\Phi(\tau)$ sînt atinse la $\tau_1=0{,}09$, respectiv la $\tau_2=1{,}165$. Se observă

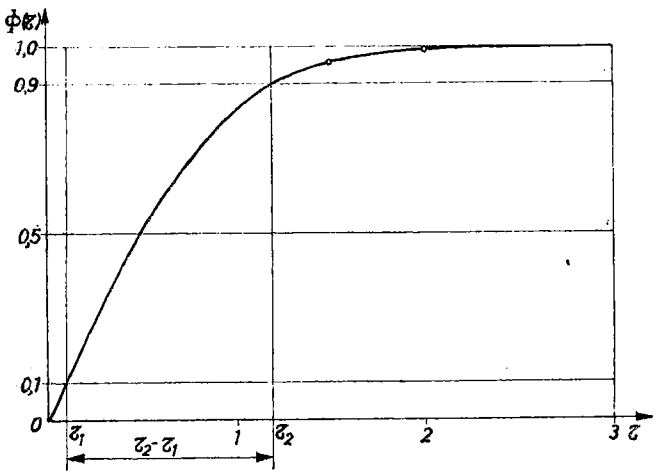


Fig. 2.9. Relativ la dependența între timpul de creștere și banda de frecvență.

că, dacă se ține seama de (2.59) timpul de creștere este dat de

$$T_{cr} = t_2' - t_1 = \frac{k}{\pi}(\tau_2 - \tau_1) = 0{,}34218k. \tag{2.62}$$

Din relațiile (2.55) și (2.62) se obține dependența între timpul de creștere și banda de frecvență B:

$$T_{cr} = 0{,}34218\frac{\sqrt{\ln\sqrt{2}}}{B} = 0{,}2014/B. \tag{2.63}$$

Notă. Dependența între timpul de creștere și banda de frecvență a fost stabilită de mai mulți autori [6, 25, 67] la sisteme *necauzale*, în mod concret la stabilirea performanțelor filtrelor active. După formalismul sistemelor necauzale, deși excitația apare la timpul $t=0$, răspunsul există la valori $t<0$. În acest caz răspunsul indicial are forma

$$f(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(\tau) \tag{2.64}$$

cu τ dat de relația (2.59) și cu valori ale timpului cuprinse între $-\infty$ și $+\infty$. Răspunsul indicial prezintă astfel o simetrie răsturnată față de valoarea 0,5, ceea ce din punct de vedere formal apare atractiv. În aceasta situație Wolf [67] stabilește dependența, între timpul de creștere și banda de frecvență, sub forma

$$T_{cr} = \frac{0{,}34}{B}. \tag{2.65}$$

Atît relația (2.63), cît și relația (2.65) sînt utilizate în primă aproximație. Dacă se măsoară timpul de creștere pe oscilogramele sistemelor fizice de măsurare, se constată dispersii importante față de ambele relații. Relația (2.63) este mai potrivită pentru sistemele la care răspunsul indicial acuză o viteză de creștere mai mare în zona inițială, iar relația (2.65) este mai potrivită pentru sistemele cu viteză de creștere inițială mai redusă.

2.4.5. *Timpul de creștere și banda de frecvență la un lanț de măsurare*

În cazul unui lanț de măsurare este important a se determina banda de frecvență sau timpul de creștere al lanțului în funcție de banda de frecvență sau timpul de creștere al fiecărui cuadripol ce intră în structura lanțului. În tehnica încercărilor se obține o singură caracteristică de frecvență sau un singur răspuns indicial, în care se includ proprietățile întregului lanț de măsurare, inclusiv ale osicilografului catodic. Din această cauză este util a se determina numai proprietățile convertorului care poate fi un șunt coaxial sau un divizor de tensiune.

Pentru mai mulți cuadripoli în lanț, în acord cu relația (2.54), caracteristica de frecvență este dată de relația

$$G(f) = \prod_{i=1}^{n} e^{-k_i^2 f^2}, \tag{2.66}$$

iar dacă se ține seama de relația (2.55) se obține

$$G(f) = e^{-\ln\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{B_i^2}\right)}. \tag{2.67}$$

Rezultă din expresia (2.67) că se poate scrie

$$\frac{1}{B^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{B_i^2};$$

iar banda echivalentă a lanțului de măsurare rezultă

$$B = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{B_i^2}}}. \tag{2.68}$$

Relația (2.62) arată că timpul de creștere este invers proporțional cu banda de frecvență. În aceste condiții relația (2.68) se transformă în

$$T_{cr} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} T_{cri}^2} \tag{2.69}$$

Notă. Relațiile (2.65) și (2.69) sînt aproximative, deoarece:
a) s-a admis că sistemul de măsurare este caracterizat prin defazaj nul;
b) s-a admis caracteristica de frecvență în amplitudine de tip Gauss.
În realitate aceste condiții nu sînt îndeplinite pe deplin, dar relațiile (2.68) și (2.69) reprezintă bune aproximări pentru sistemele de măsurare concrete.

2.4.6. *Caracteristica de frecvență și răspunsul indicial*

Din lucrările de sinteza și analiza rețelelor [6], [25], [72] se cunosc relațiile de dependență între caracteristica de frecvență și răspunsul indicial. Una din aceste relații are expresia

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Re}[\underline{G}(j\omega)] \sin \omega t \cdot d\omega}{\omega}. \tag{2.70}$$

Această relație poate fi utilizată cu condiția de a cunoaște expresia funcției de transfer $\underline{G}(j\omega)$ și de a realiza integrala cerută de relația (2.70).
În cazul testării sistemelor fizice de măsurare, spre exemplu la divizoarele de tensiune, funcția de transfer este dată prin grafice de amplitudine și de fază. Răspunsul indicial se poate determina folosind metoda Floyd [72], în care caz este necesar a se trasa diagrama $\mathrm{Re}[\underline{G}(j\omega)] = f(\omega)$ și a se descompune această diagramă în trapeze elementare. În cele din urmă, răspunsul indicial se obține prin însumarea răspunsurilor corespunzătoare trapezelor elementare folosind diagrame [1] sau tabele [72] de interpolare.

Utilizarea calculatorului oferă posibilitatea de a calcula direct răspunsul indicial pentru valori discrete ale timpului. Pentru un număr suficient de mare și bine ales de valori ale timpului, spre exemplu 50...1000, se poate trasa o curbă cvasicontinuă a răspunsului indicial.

În acest scop în relația (2.70) se fac notațiile:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f; \\ \mathrm{d}\omega &= 2\pi \mathrm{d}f; \\ \mathrm{Re}[\underline{G}(\mathrm{j}\omega)] &= G(2\pi f)\cos\alpha; \\ \alpha &= \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\mathrm{Im}[\underline{G}(\mathrm{j}\omega)]}{\mathrm{Re}[\underline{G}(\mathrm{j}\omega)]}; \end{aligned} \tag{2.71}$$

iar relația (2.70) se scrie sub forma

$$f(t_q) = \int_0^\infty C_{tq}\,\mathrm{d}f, \tag{2.72}$$

unde s-a notat

$$C_{tq} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{G(2\pi f)\cos\alpha\cdot\sin(2\pi f_i t_q)}{f_i}. \tag{2.73}$$

Pentru momentul t_q, funcția C_{tq} ia valori discrete, la valori discrete atribuite frecvenței f_i. Pentru a găsi valoarea la momentul t_q a răspunsului indicial, se efectuează integrarea numerică indicată de relația (2.72) pînă la frecvența la care amplitudinea tinde către zero.

Această metodă de calcul a fost aplicată pentru găsirea răspunsului indicial al unui divizor de tensiune universal cu raport de reducere de 1/100 și tensiune nominală înaltă 25 kV. În fig. 2.10 se prezintă caracteristica de frecvență a divizorului obținută experimental cu analizorul de rețea HP 8407A. Curba *a* reprezintă atenuarea, iar curba *b* reprezintă unghiul de defazaj α în funcție de frecvență. Testarea în frecvență s-a efectuat pînă la 50 MHz, dar în fig. 2.10 s-a prezentat testarea numai pînă la 10 MHz.

Din curba atenuării s-a dedus caracteristica în amplitudine, reprezentată în fig. 2.11, în care curba *a* reprezintă amplitudinea sistemului fizic, iar curba *b* reprezintă amplitudinea unui sistem de defazaj nul de tip Gauss-ian, al cărui parametru *k* [vezi relaţia (2.55)]

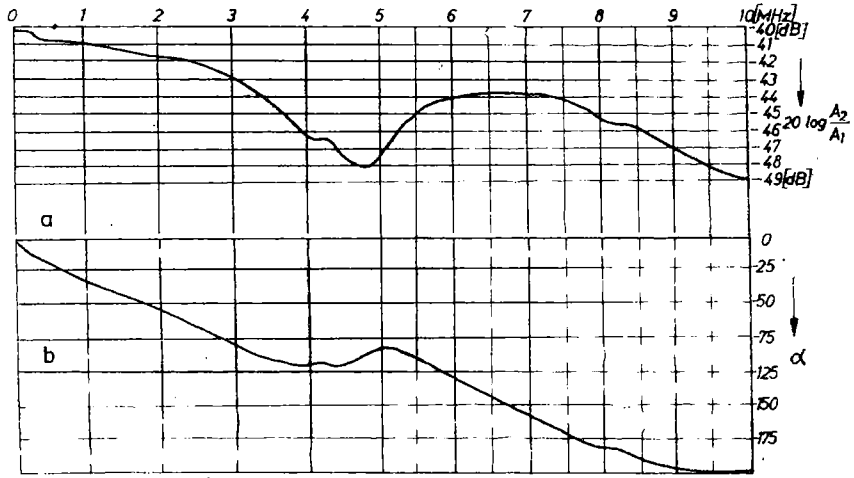


Fig. 2.10. Caracteristica de frecvenţă a unui divizor de tensiune universal:

a — curba atenuării; *b* — curba defazajului.

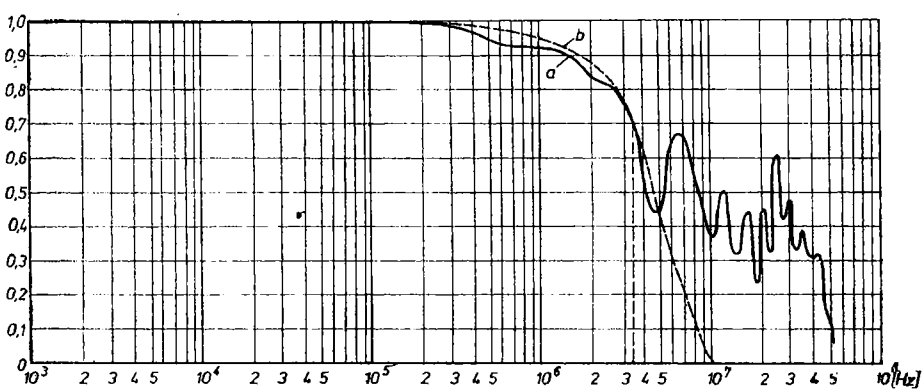


Fig. 2.11. Caracteristica de frecvenţă în amplitudine:

a — curba fizică; *b* — curba de tip Gauss-ian.

corespunde atenuării curbei fizice de 3 dB, la o bandă de trecere de 3,3 MHz. Cu alte cuvinte, la această frecvență ambele curbe au aceeași valoare și anume 0,707.

În fig. 2.12 se prezintă graficul funcției C_{iq} pentru timpul $t_q = 10^{-1}$ s. Prin integrarea funcției C_{iq}, conform relației (2.72) se obține valoarea 1 a răspunsului indicial. Se constată deci că, la

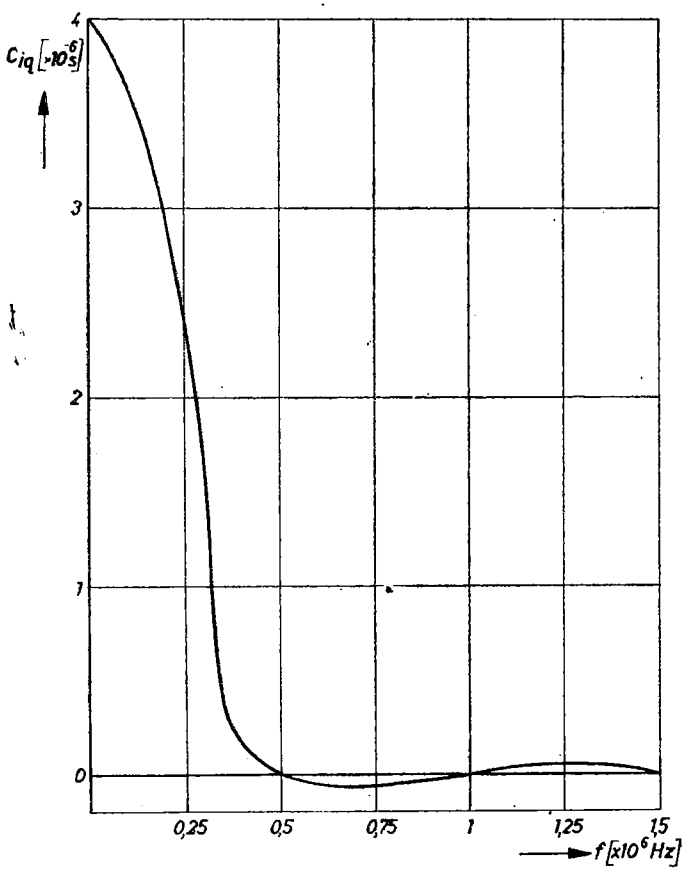


Fig. 2.12. Funcția C_{iq} pentru $t_q = 10^{-6}$ s.

această valoare a timpului, răspunsul indicial este stabilizat. Pentru a se obține valori ale răspunsului indicial în etapa de creștere s-au luat momente $t_q = 5...200$ ns, cu pasul timpului 5 ns. S-a

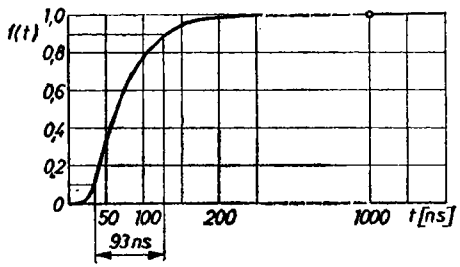


Fig. 2.13. Răspunsul indicial calculat cu relația (2.72).

obținut astfel diagrama răspunsului indicial din fig. 2.13. Timpul de creștere al acestui răspuns este de 93 ns și diferă atît de valoarea 61 ns dată de relația (2.63), cît și de valoarea de 103 ns dată de relația (2.65). Aceste abateri se explică prin faptul că rezultatul de 93 ns s-a obținut prelucrînd proprietățile unui sistem fizic, care nu are defazaj minimal, iar caracteristica de frecvență, în amplitudine, nu este de tip Gauss-ian, după cum se observă și în fig. 2.11.

3. Şunturi pentru măsurarea curenţilor cu variaţii rapide

Motivele din cauza cărora transformatoarele de curent inductive nu pot servi drept convertoare la măsurarea curenţilor cu variaţii rapide, au fost prezentate în introducerea lucrării. Soluţii posibile de convertoare care să satisfacă exigenţele încercărilor de echipament electric, în afara sistemelor magneto-optice şi a sistemelor care funcţionează cu sonde Hall, rămîn şuntul bifilar şi şuntul coaxial.

3.1. Şuntul bifilar

Desigur că prima încercare de a utiliza convertoare liniare la măsurarea curenţilor cu variaţii rapide este de a folosi şuntul normal, de curent continuu. Acest dispozitiv este dimensionat astfel ca, la trecerea curentului nominal, să ofere o cădere de tensiune de ordinul 60 mV, adică potrivit pentru a excita mai departe un aparat analogic, numeric sau un osciloscop echipat cu amplificator şi garantat pentru o bandă îngustă de frecvenţă. Barele, din care este construit şuntul de curent continuu, sînt de manganină, cu un coeficient de temperatură de 10^{-5}grd^{-1} şi deci asigură practic o linearitate pentru o gamă largă de curenţi. Dacă semnalul de tensiune cules de la şuntul de curent continuu este aplicat unui osciloscop, intensitatea curentului în conductoarele de legătură este determinată, practic, de impedanţa de intrare a osciloscopului, de ordinul 1 MHz şi rezultă a fi extrem de redus. În aceste condiţii semnalul de tensiune măsurat de osciloscop, în acord cu fig. 3.1, este

$$u = \rho J l + \frac{d\Phi}{dt}. \tag{3.1}$$

unde : ρ este rezistivitatea materialului ;
J — densitatea de curent ;

l — lungimea şuntului;
φ — fluxul magnetic care străbate bucla de măsurare.

Tensiunea de măsurare u, din relaţia (3.1), este sensibil influenţată de tensiunea indusă $d\Phi/dt$ şi de aceea, măsurarea curenţilor cu variaţii rapide nu se poate efectua cu ajutorul schemelor de măsurare folosite în curent continuu.

În fig. 3.2 se prezintă schiţa de construcţie a unui şunt cu structură bifilară. Curentul de măsurare este trecut prin n conductoare

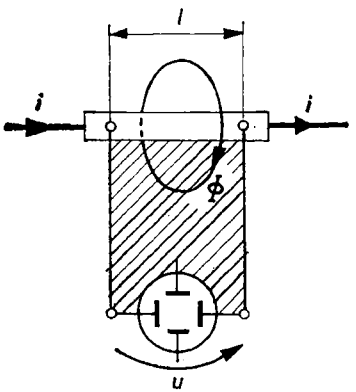


Fig. 3.1. Şuntul de curent continuu.

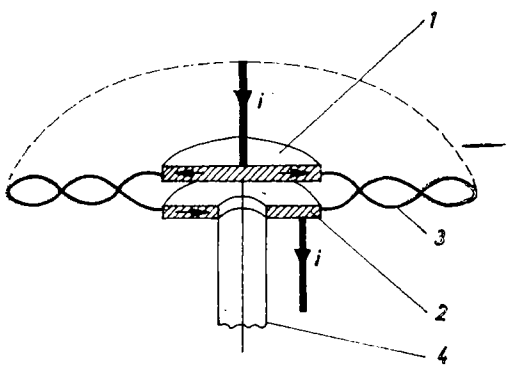


Fig. 3.2. Şuntul bifilar multiplu.

bifilare *3*, conectate în paralel la plăcile colectoare *1* şi *2*, care constituie în acelaşi timp şi bornele de intrare, respectiv de ieşire ale şuntului. Semnalul de măsurare este captat de cablul coaxial *4*.

Într-un asemenea sistem, tensiunea indusă în bucla de măsurare este diminuată în mod sensibil, iar calitatea şuntului depinde, în mod esenţial, de răspunsul la excitaţia treapta de curent a conductorului din care este realizat elementul bifilar, care în esenţă este un conductor cilindric plin, din manganină sau un material asemănător, în ce priveşte rezistivitatea şi coeficientul de temperatură al rezistivităţii.

3.1.1. *Răspunsul conductorului cilindric plin la excitaţia treaptă de curent*

Cunoaşterea acestui răspuns are semnificaţie atît pentru determinarea timpului de răspuns, cît şi pentru explicarea supratensiunilor ce apar pe rezistenţele antiinductive.

Cîmpul magnetic şi densitatea de curent [29]. Studiul comportării conductorului circular plin, la excitaţia treaptă, presupune ca

metodă exactă de calcul utilizarea ecuațiilor lui Maxwell. Se consideră materialul conductor, de exemplu manganina (86% Cu, 12% Mn, 2% Ni) ca având o permeabilitate constantă $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m și o conductivitate constantă, practic independentă de temperatură, $\sigma = 2{,}33 \cdot 10^6$ S/m.

Ecuațiile lui Maxwell în regim cvasistaționar și în cazul conductoarelor masive, imobile, liniare, izotrope, omogene, fără polarizație electrică sau magnetică permanentă, cu aproximația neglijării densității de volum a sarcinii electrice, sînt :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}\,;\ \text{div } \mathbf{H} = 0\,;$$
$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}\,;\ \text{div } \mathbf{E} = 0. \tag{3.2}$$

Prin aplicarea rotorului primelor două ecuații din sistemul (3.2), se obțin ecuațiile diferențiale binecunoscute :

$$\Delta \mathbf{H} = \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{3.3}$$

și

$$\Delta \mathbf{E} = \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{3.4}$$

Pentru obținerea soluțiilor ecuațiilor (3.3) și (3.4), se utilizează coordonatele cilindrice r, φ, z și se observă că, din cauza simetriei cilindrice a dispozitivului ($E = E_z$ și $H = H_\varphi$), ecuațiile (3.3) și (3.4) se transformă în

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} = \sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t}\,; \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} = \sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{3.6}$$

Ținînd seamă că se urmărește comportarea în regim tranzitoriu a dispozitivului, se transcriu ecuațiile (3.5) și (3.6) sub formă operațională :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{H}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}r} - \frac{\mathcal{H}}{r^2} = \sigma\mu\, \mathrm{p}\mathcal{H}\,; \tag{3.7}$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\mathcal{E}}{dr} = \sigma\mu\, p\mathcal{E}, \tag{3.8}$$

unde : $\mathfrak{L}(H) = \mathcal{H}$ şi $\mathfrak{L}(E) = \mathcal{E}$.

Relaţia (3.8) este o ecuaţie Bessel de ordin zero

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\mathcal{E}}{dr} = \gamma^2\mathcal{E}, \tag{3.9}$$

unde $\gamma^2 = \sigma\,\mu p$, (3.10)

care admite următoarea soluţie cunoscută [29]

$$\mathcal{E} = AJ_0(j\gamma r) + BN_0(j\gamma r), \tag{3.11}$$

unde $J_0(j\gamma r)$ este o funcţie Bessel de speţa 1 şi ordinul zero ; $N_0(j\gamma r)$ — funcţie Bessel de speţa a 2-a şi ordinul zero.

Legătura între H şi E este dată de primele două relaţii din sistemul (3.2) exprimate în coordonate cilindrice, ţinînd seama că $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(Hr) = \sigma E = J\,; \tag{3.12}$$

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial r}. \tag{3.13}$$

Transcriind ecuaţia (3.13) sub formă operaţională

$$\mu p\mathcal{H} = \frac{d\mathcal{E}}{dr}. \tag{3.14}$$

se poate găsi şi soluţia ecuaţiei (3.7), ţinînd seama de relaţia (3.11)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu p} \cdot \frac{d}{dr}\,[AJ_0(j\gamma r) + BN_0(j\gamma r)]. \tag{3.15}$$

Constanta B trebuie să fie nulă, pentru că la $r = 0$ cîmpul magnetic este nul în ax şi $N_0(0) = -\infty$. Deci relaţia (3.15) devine

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu p}\,\frac{d}{dr}\,[AJ_0(j\gamma r)] = \frac{j\gamma}{\mu p} AJ_0'(j\gamma r) = \frac{\sigma}{j\gamma} AJ_1(j\gamma r), \tag{3.16}$$

unde $\mu p = \dfrac{\gamma^2}{\sigma}$ din relaţia (3.10) şi $J'_0(j\gamma r) = -J_1(j\gamma r)$.

Originalul expresiei (3.16), demonstrat în anexa 4, este

$$H = \frac{I}{2\pi a}\left[\frac{r}{a} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\beta_k \frac{r}{a}\right)}{\beta_k J_0(\beta_k)} e^{-\frac{t}{T_k}}\right], \qquad (3.17)$$

în care : a este raza conductorului cilindric ;

r — distanța între ax și punctul considerat pe secțiunea conductorului ;

β_k — soluțiile pentru care se anulează funcția Bessel de ordinul 1, $[J_1(\beta_k) = 0]$;

$T_k = \frac{\sigma\mu a^2}{\beta_k^2}$ — constante de timp.

Din relațiile (3.12) și (3.17) se obține densitatea de curent la distanța r de axa conductorului

$$J = \frac{I}{\pi a^2}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\beta_k \frac{r}{a}\right)}{J_0(\beta_k)} e^{-\frac{t}{T_k}}\right]. \qquad (3.18)$$

Demonstrația relației (3.18) este dată în anexa 5.

Ca aplicație a relațiilor (3.17) și (3.18) s-au calculat cu ajutorul tabelelor din [40] cîmpul magnetic și densitatea de curent pentru un conductor cilindric plin, din manganină, cu raza $a = 1$ mm, la următoarele distanțe față de axa conductorului : $r = a$; $r = 0{,}75\ a$; $r = 0{,}5\ a$; $r = 0{,}25\ a$. Rezultatele obținute sînt trecute în curbele trasate în fig. 3.3 pentru cîmpul magnetic și în fig. 3.4 pentru densitatea de curent.

În fig. 3.3 H_a reprezintă intensitatea cîmpului magnetic la periferia conductorului, adică $H_a = \frac{I}{2\pi a}$. În fig. 3.4 J_∞ reprezintă densitatea de curent în regim staționar, adică $J_\infty = \frac{I}{\pi a^2}$.

Se constată, în fig. 3.3, că în interiorul conductorului cîmpul magnetic în momentul inițial este nul și că se stabilizează la valoarea $H_a \frac{r}{a}$.

Densitatea de curent este extrem de importantă în primul moment la periferia conductorului, în timp ce în același moment este nulă în interior. Din analiza expresiilor (3.17) și (3.18) se constată

că și valorile pentru H și J se conservă, dacă raportul $\frac{t}{a^2}$ rămîne constant. Această observație permite să se utilizeze aceleași diagrame pentru diferite valori ale diametrului conductorului.

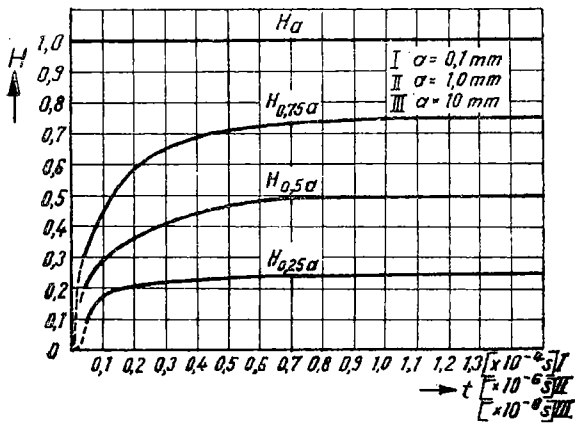


Fig. 3.3. Cîmpul magnetic în conductorul de secțiune circulară:
a — raza conductorului.

Astfel diagramele sînt valabile cu scări ale timpului modificate pentru $a = 0{,}1$ mm; 1 mm; 10 mm.

Evaluarea timpului de răspuns. Deoarece tensiunea măsurată la bornele șuntului este funcție de densitatea J_e la periferia conductorului, din relația (3.18) pentru $r = a$, se obține

$$J_e = \frac{I}{\pi a^2}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{t}{T_k}}\right] \tag{3.19}$$

și rezultă tensiunea pentru un conductor de lungime l

$$u = J_e \frac{l}{\sigma} = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \frac{l}{\sigma}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{t}{T_k}}\right]. \tag{3.20}$$

Timpul de răspuns, conform relației (2.8) devine

$$T_r = \int_0^{\infty}\left[1 - \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{t}{T_k}}\right)\right] dt = -\sum_{k=1}^{\infty} T_k. \tag{3.21}$$

Rezultatele numerice obținute cu relația (3.21), în care s-a considerat $k = 10$, se indică în fig. 3.5.

Semnul minus din relația (3.21) se datorește modului de variație a densității de curent la suprafața conductorului (curba J_a din fig. 3.4), tensiunea măsurată u fiind proporțională cu $J_e = J_a$.

Calculele prezentate arată că, pentru obținerea unui timp de răspuns de ordinul nanosecundelor, cînd un conductor cilindric plin din material rezistiv este supus excitației treaptă, este necesar ca diametrul său să fie de ordinul fracțiunilor de milimetru.

Pentru realizarea unor șunturi destinate a măsura curenții intenși este util să se folosească mai multe fire subțiri în paralel răsucite antiinductiv. În funcție de timpul de răspuns dorit se va alege diametrul firului.

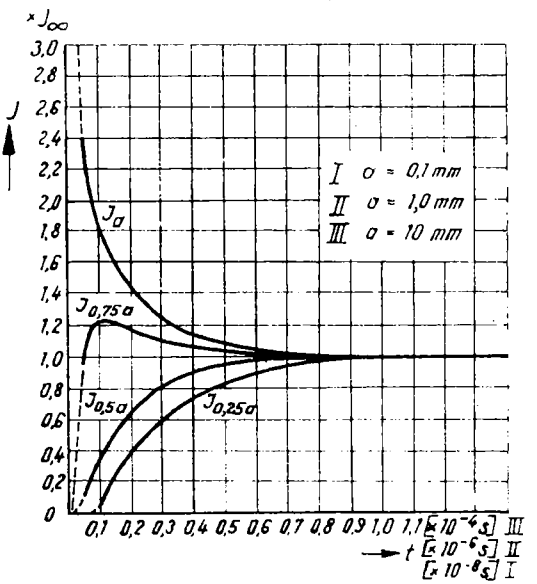


Fig. 3.4. Densitatea de curent în conductorul de secțiune circulară:
a — raza conductorului.

3.1.2. *Supratensiuni pe rezistențele antiinductive*

Dacă se examinează relația densității de curent la periferia conductorului circular plin și curba corespunzătoare din fig. 3.4 se constată că, pentru valori reduse ale timpului, densitatea de curent este extrem de mare, în mod teoretic la $t \to 0$; $J_e \to \infty$. Densitatea de curent și tensiunea de măsurare fiind legate între ele prin relația (3.20) rezultă că, la aplicarea excitației treaptă de curent, în mod teoretic, gradientul de potențial în

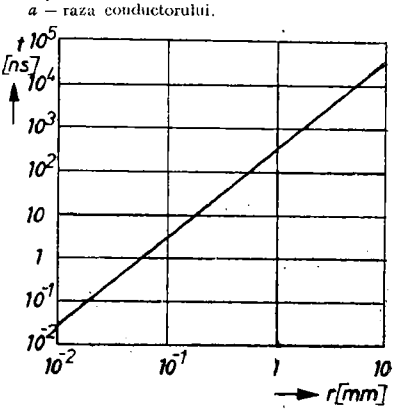


Fig. 3.5. Timpul de răspuns al conductorului cilindric plin.

lungul conductorului este infinit de mare. Cum excitația treaptă de curent este o realitate teoretică și în mod practic excitația este o rampă cu un timp de creștere de 0,5 ... 10 ns, rezultă că gradientul longitudinal al potențialului va fi finit, dar foarte mare. Este de așteptat, în consecință, ca pe rezistoarele realizate din fire metalice sau chiar pe rezistoarele cu peliculă să apară în funcționare supratensiuni importante, dacă structura generală a circuitului comportă o inductivitate redusă.

3.2. Șuntul coaxial

Construcția bifilară a șuntului, prezentată în subcap. 3.1, nu elimină în întregime tensiunea indusă în bucla circuitului de măsurare provocată de variația curentului intens măsurat sau de alte cîmpuri magnetice de interferență. De aceea, pentru a elimina efectul tensiunii

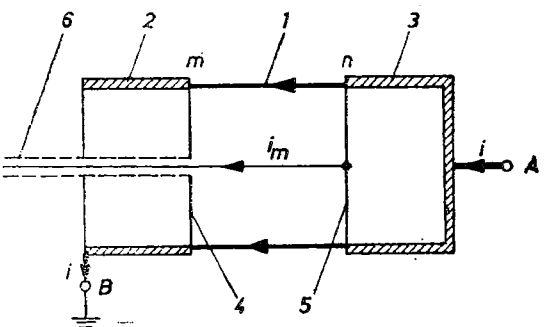


Fig. 3.6. Șunt coaxial necranat.

induse în bucla circuitului de măsurare, se recurge la șuntul coaxial, a cărui schiță constructivă este prezentată în fig. 3.6, pentru varianta neecranată. Curentul i, care se măsoară, trece prin cilindrul rezistiv *1*, realizat din manganină sau alt aliaj cu proprietăți fizice similare. Acest cilindru rezistiv este încadrat între două cilindre *2* și *3* realizate din material cu conductivitate sporită, urmărindu-se astfel eliminarea efectelor de capăt asupra circuitului de măsurare. O bornă *A* a șuntului se prevede pe cilindrul *3*, iar cealaltă bornă *B* se prevede pe cilindrul *2* și se conectează la masă. Tensiunea de măsurare este culeasă, practic în mod continuu, de la extremitățile circulare *m* și *n* ale cilindrului rezistiv *1*, prin intermediul discurilor *4* și *5*. La discul *5* se conectează conductorul central al cablului coaxial, iar la discul *4* ecranul aceluiași cablu. Intensitatea curentului de măsurare i_m

este determinată de căderea de tensiune între circumferințele m, n și de impedanța terminală a cablului de măsurare, care în mod uzual este impedanța caracteristică a acestuia. Funcționarea șuntului coaxial se bazează pe faptul că în interiorul cilindrului rezistiv *1*, cîmpul magnetic datorat curentului intens i este nul și ca urmare, cablul coaxial culege semnalul de tensiune

$$u = \rho J l. \tag{3.22}$$

Relația (3.22) este acceptată în ideea că inductivitatea circuitului de măsurare este neglijabilă și că intensitatea curentului i_m este suficient de mică, pentru a nu conduce, în regim variabil, la tensiuni induse, semnificative, în raport cu tensiunea semnalului util. Construcția prezentată în fig. 3.6 prezintă inconvenientul de a oferi o protecție redusă contra interferenței cîmpurilor electromagnetice exterioare. Construcția din fig. 3.7 înlătură acest inconvenient cu ajutorul ecranului 7 care este parcurs de curentul intens i în sens contrar modului de parcurgere a cilindrului rezistiv 1. Ecranul 7 este un cilindru metalic care împiedică pătrunderea cîmpului electromagnetic din exterior în interiorul buclei de măsurat. În același timp, șuntul coaxial ecranat este lipsit de cîmp magnetic în exteriorul ecranului și ca urmare nu este supus forțelor electrodinamice, chiar dacă este plasat într-un cîmp magnetic intens. Această afirmație este valabilă dacă se face abstracție de efectele de capăt ce pot apărea datorită legăturilor la bornele șuntului.

Calitatea unui șunt coaxial, apreciată fie prin criteriul timpului de răspuns sau al timpului de creștere, fie prin criteriul caracteristicei de frecvență, după cum s-a arătat în cap. 2, depinde, în esență, de

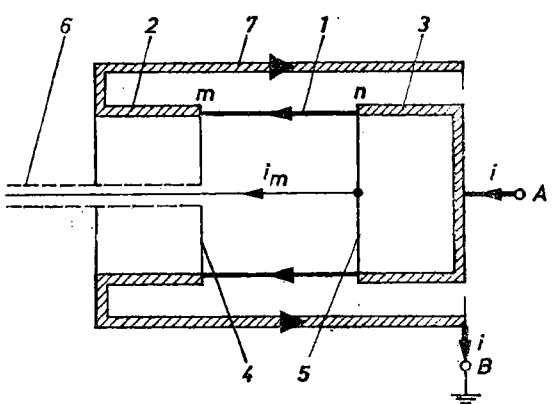


Fig. 3.7. Șunt coaxial ecranat.

proprietățile electromagnetice intrinseci ale tubului rezistiv notat cu reperul *1* în fig. 3.6 și 3.7.

În conexiune cu aceste proprietăți intrinseci mai există și alți factori care determină calitatea instalației de măsurare, în ansamblu. Printre aceștia se numără : posibilitatea de compensare a răspunsului dat de șunt ; posibilitatea de adaptare a impedanțelor internă și deci proprie șuntului, cu cea externă, adică proprie conexiunii între șunt și oscilograf ; performanțele dinamice ale oscilografului folosit pentru înregistrarea fenomenului cercetat.

3.2.1. *Soluția aproximativă a răspunsului la excitația treaptă de curent a conductorului tubular* [33]

Această soluție prezintă interes pentru șunturile coaxiale cu perete subțire al tubului rezistiv, adică pentru acel tub la care grosimea peretelui este, de exemplu, sub 0,5 mm.

În literatura tehnică [37, 62, 45], se prezintă relația aproximativă a răspunsului la excitația treptată de curent I, prin expresiile densității de curent J_i pe peretele interior al tubului și J_e pe peretele exterior al tubului. În anexa 6 se prezintă demonstrația corespunzătoare, în care se arată că un termen al ecuației diferențiale, ce descrie fenomenul de pătrundere al cîmpului electromagnetic, este neglijat.

Rezultă astfel expresiile pentru densitățile de curent : pe peretele exterior

$$J_e = \frac{I}{2\pi r_e \delta}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{t}{T_k}}\right] \tag{3.23}$$

și pe peretele interior

$$J_e = \frac{I}{2\pi r_i \delta}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{t}{T_k}}\right], \tag{3.24}$$

în care : σ este conductivitatea materialului ;

μ — permeabilitatea materialului ;

r_e — raza exterioară a tubului ;

r_i — raza interioară a tubului ;

I — treapta de curent ;

$\delta = r_e - r_i$ — grosimea tubului ;

$T_k = \frac{\sigma\mu\delta^2}{k^2\pi^2}$ — constanta de timp de ordinul k.

Aceste densități de curent conduc, pentru un conductor tubular de lungime l, la tensiunile corespunzătoare :

$$u_e = J_e \frac{l}{\sigma} = \frac{I}{2\pi r_e \delta} \cdot \frac{l}{\sigma}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{t}{T_k}}\right]; \qquad (3.25)$$

$$u_i = J_i \frac{l}{\sigma} = \frac{I}{2\pi r_i \delta} \cdot \frac{l}{\sigma}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{t}{T_k}}\right]. \qquad (3.26)$$

Timpul de răspuns se obține ținîndu-se seamă de definiția din relația (2.8), aplicată relației (3.26). Se obține astfel expresia aproximativă a timpului de răspuns

$$T_r = \int_0^{\infty} \left\{1 - \left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{t}{T_k}}\right]\right\} dt = -2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k T_k. \qquad (3.27)$$

Înlocuind pe T_k cu expresia din relația (3.24), în relația (3.27) rezultă

$$T_r = -2\frac{\sigma\mu_0\delta^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}. \qquad (3.28)$$

Dar din lucrarea [60] se demonstrează că

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Astfel încît,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \ldots = -\frac{\pi^2}{12};$$

În consecință, expresia timpului de răspuns din relația (3.28) devine

$$T_r = \frac{\mu\sigma\delta^2}{6} = \frac{\mu\delta^2}{6\rho}. \qquad (3.29)$$

Se constată deci că timpul de răspuns intrinsec, după cum este prezentat de relația (3.29), depinde de proprietățile de material : permeabilitatea μ, conductivitatea σ și de grosimea δ a peretelui tubului

rezistiv. Pentru a obține un timp de răspuns de valoare mică este necesar a se folosi materiale din categoria materialelor rezistive, neferomagnetice și cu grosime mică a peretelui tubului rezistiv. Relația (3.29) oferă soluții satisfăcătoare pentru marea majoritate a aplicațiilor practice.

3.2.2. *Soluția exactă a răspunsului la excitația treaptă de curent a conductorului tubular*

Dacă se privesc atent expresiile densităților de curent J_e și J_i din relațiile (3.23) și (3.24) se constată, din punct de vedere fizic, o anomalie. Anume, pentru $t \to \infty$, $J_e < J_i$. În mod normal, la $t \to \infty$, cele două densități de curent ar trebui să fie egale, dar anomalia provine din neglijarea unui termen — vezi anexa 6 — din ecuația diferențială a răspunsului la excitația treaptă de curent. Găsirea soluției exacte [47, 33] prezintă interes în vederea eliminării anomaliei menționate și în aprecierea aproximației ce rezultă prin acceptarea soluției aproximative.

Ecuațiile cîmpului electromagnetic se mențin sub forma prezentată în § 3.1.1 și anume : relația (3.11) ca soluție generală pentru cîmpul electric în domeniul imagine și (3.15) pentru cîmpul magnetic în domeniul imagine

Originalul expresiei (3.15), demonstrat în anexa 7, este

$$H = \frac{I}{2\pi r_e}\left[\frac{(r^2 - r_i^2)}{(r_e^2 - r_i^2)} \cdot \frac{r_e}{r} - \right.$$

$$\left. - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(x_k)N_1\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) - N_1(x_k)J_1\left(x_k \frac{r}{r_i}\right)}{x_k a_k} e^{-\frac{t}{T_k}}\right], \quad (3.30)$$

unde :

$$a_k = J_1(mx_k)N_0(x_k) - N_1(mx_k)J_0(x_k) + m[N_1(x_k)J_0(mx_k) - J_1(x_k)N_0(mx_k)];$$

r este distanța dintre ax și punctul în care se calculează cîmpul magnetic ($r_i \leqslant r \leqslant r_e$) ;

$m = \frac{r_e}{r_i}$ — raportul razelor tubului ;

x_k — rădăcina ecuației de tipul

$$J_1(x)N_1(mx) - N_1(x)J_1(mx) = 0 ; \quad (3.31)$$

$J_0(x)$, $N_0(x)$ — funcții Bessel de ordinul zero și de speța 1, respectiv a 2-a;

$J_1(x)$, $N_1(x)$ — funcții Bessel de ordinul 1 și de speța 1, respectiv a 2-a;

$T_k = \dfrac{\sigma\mu r_i^2}{x_k^2}$ — constanta de timp de ordinul k.

Densitatea de curent J rezultă tot din ecuațiile lui Maxwell exprimate în coordonate cilindrice:

$$J = \sigma E = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(Hr) = \frac{1}{r}H + \frac{\partial H}{\partial r} \tag{3.32}$$

sau conform demonstrației din anexa 8

$$J = \frac{I}{(r_e^2 - r_i^2)}\left[1 - \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e r_i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(x_k)N_0\left(x_k\frac{r}{r_i}\right) - N_1(x_k)J_0\left(x_k\frac{r}{r_i}\right)}{a_k}\,e^{-\frac{t}{T_k}}\right]. \tag{3.33}$$

Densitatea de curent la periferia conductorului tubular ($r = r_e$) se obține din relația (3.33).

$$J_e = \frac{I}{\pi(r_e^2 - r_i^2)}\left\{1 - \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e r_i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(x_k)N_0(mx_k) - N_1(x_k)J_0(mx_k)}{\begin{bmatrix}J_1(mx_k)N_0(x_k) - N_1(mx_k)J_0(x_k) + \\ + m[N_1(x_k)J_0(mx_k) - J_1(x_k)N_0(mx_k)]\end{bmatrix}}\,e^{-\frac{t}{T_k}}\right\}. \tag{3.34}$$

Densitatea de curent în interiorul conductorului tubular ($r = r_i$) se obține tot din relația (3.33)

$$J_i = \frac{I}{\pi(r_e^2 - r_i^2)}\left\{1 - \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e r_i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(x_k)N_0(x_k) - N_1(x_k)J_0(x_k)}{\begin{bmatrix}J_1(mx_k)N_0(x_k) - N_1(mx_k)J_0(x_k) + \\ + m[N_1(x_k)J_0(mx_k) - J_1(x_k)N_0(mx_k)]\end{bmatrix}}\,e^{-\frac{t}{T_k}}\right\}. \tag{3.35}$$

Ca aplicație a relațiilor (3.34) și (3.35) s-au calculat densitățile de curent la exteriorul și interiorul unui conductor tubular din isabellin (84 % Cu, 13 % Mn, 3 % Al), cu:

— conductivitatea $\sigma = 2 \cdot 10^6$ S/m;

— raza interioară $r_i = 32$ mm;

— raza exterioară $r_e = 35{,}2$ mm;

— permeabilitatea $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Rădăcinile x_i s-au obținut, din tabelele [40] sub forma indicată în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

Primele patru rădăcini x_k ale expresiei
$J_1(x)N_1(mx) - J_1(mx)N_1(x) = 0$

m	$(m-1)x_1$	$(m-1)x_2$	$(m-1)x_3$	$(m-1)x_4$
1,1	3,1427	6,2837	9,4251	12,5666

Calculul funcțiilor Bessel, care nu sînt tabelate, s-a efectuat cu ajutorul expresiilor [40]:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \tag{3.36}$$

unde $|x| \gg 1$; $|x| \gg n$;

$$N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{3.37}$$

S-au obținut rezultatele din tabelul 3.2, reprezentate în fig. 3.8 cu linii pline.

Tabelul 3.2

Densitatea de curent calculată cu relațiile (3.34) și (3.35)

t	0,5	1	2	5	10	20	$\times 10^{-6}$ s
J_e	3,86	2,76	1,975	1,278	1,0408	1,00088	$\times J_\infty$
J_i	0	0	0,175	0,712	0,9577	0,9990	$\times J_\infty$

În tabelul 3.2 și fig. 3.8, J_∞ reprezintă densitatea de curent în regim staționar, adică

$$J_\infty = \frac{I}{\pi(r_e^2 - r_i^2)}.$$

Calculînd densitățile de curent cu formulele (3.23) și (3.24) raportate tot la J_∞, se obțin rezultatele din tabelul 3.3 și fig. 3.8, cu linii punctate.

Se observă, din tabelele 3.2 și 3.3, că valorile densităților de curent calculate prin metoda exactă, diferă de cele calculate prin

metoda aproximativă mai ales după 10 μs ; într-adevăr în timp ce J_e și J_i tind către egalizarea cu J_∞ în tabelul 3.2, în tabelul 3.3 J_i devine mai mare ca J_e, ceea ce constituie o anomalie. Această situație apare

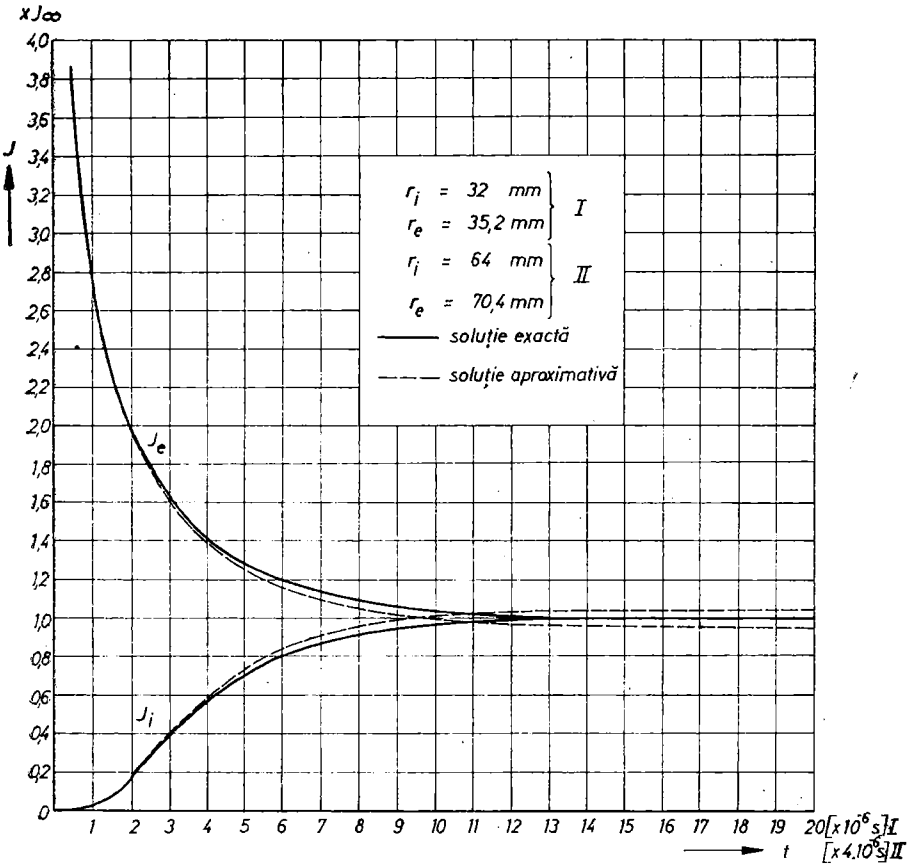


Fig. 3.8. Densitatea de curent în conductorul tubular :
r_i — raza interioară ; r_e — raza exterioară.

Tabelul 3.3

Densitatea de curent calculată cu relațiile (3.23) **și** (3.24)

t	0,5	1	2	5	10	20	$\times 10^{-6}$ s
J_e	3,85	2,73	1,935	1,24	1	0,96	$\times J_\infty$
J_i	0	0	0,17	0,745	1,001	1,045	$\times J_\infty$

cu atît mai pregnant cu cît grosimea peretelui tubului rezistiv creşte. La grosimi mici, $\delta < 0{,}5$ mm, diferenţele prezentate între densităţile de curent, obţinute cu soluţia exactă şi cea aproximativă, nu mai sînt semnificative.

Timpul de răspuns se calculează cu ajutorul expresiei răspunsului în tensiune obţinut cu densitatea de curent pe suprafaţa interioară a tubului rezistiv, adică

$$u_i = J_i \frac{1}{\sigma} = \frac{I}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} \cdot \frac{l}{\sigma} \left[1 - \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e r_i} \sum_{k=1}^{n} A_k \, e^{-\frac{t}{T_k}} \right], \qquad (3.38)$$

în care, cu notaţiile din relaţiile (3.31)

$$A_k = \frac{J_1(x_k)N_0(x_k) - N_1(x_k)J_0(x_k)}{J_1(mx_k)N_0(x_k) - N_1(mx_k)J_0(x_k) + mN_1(x_k)J_0(mx_k) - J_1(x_k)N_0(mx_k)}$$

Timpul de răspuns, conform relaţiei (2.8) devine

$$T_k = \int_0^\infty \left[1 - \left(1 - \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e r_i} \sum_{k=1}^{n} A_k \, e^{-\frac{t}{T_k}} \right) \right] dt = \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e r_i} \sum_{k=1}^{n} A_k T_k. \qquad (3.39)$$

Se constată că, pentru acelaşi material conductor, cu $m = \frac{r_e}{r_i} = \text{const}$ şi raza r_i variabile $(r_{i1}, r_{i2}, \ldots)$, există următoarea relaţie între timpii de răspuns corespunzători $(T_{r1}, T_{r2}, \ldots)$

$$\frac{T_{r1}}{T_{r2}} = \frac{r_{e1}^2}{r_{i2}^2} \qquad (3.40)$$

În fig. 3.9 s-au reprezentat patru tuburi de raze diferite $r_i = 8$; 16; 32; 64 mm şi $m = 1{,}1$, pentru care s-au calculat cu relaţia de similitudine (3.40) rezultatele din tabelul 3.4, luînd ca bază timpul de răspuns al conductorului cu $r_i = 32$ mm. Acest timp de răspuns s-a calculat cu relaţia (3.39) considerînd $n = 4$, seria fiind rapid convergentă.

În fig. 3.10 s-a trasat diagrama timpului de răspuns în funcţie de raza interioară a tubului. Se poate constata o variaţie parabolică a timpului de răspuns în funcţie de această rază după cum rezultă şi din relaţia (3.40).

În ce privește timpul de răspuns, conform relației (3.39), acesta este dependent atît de raza interioară r_i, cît și de grosimea tubului reprezentată de raportul $m = r_e/r_i$. Dacă se calculează timpul de

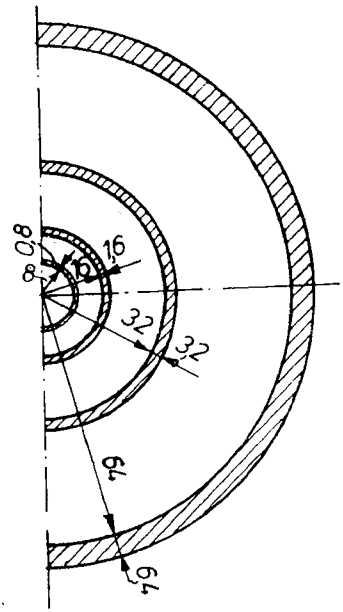


Fig. 3.9. Dimensiunile tuburilor cu $m = 1,1$ pentru care s-a calculat timpul de răspuns.

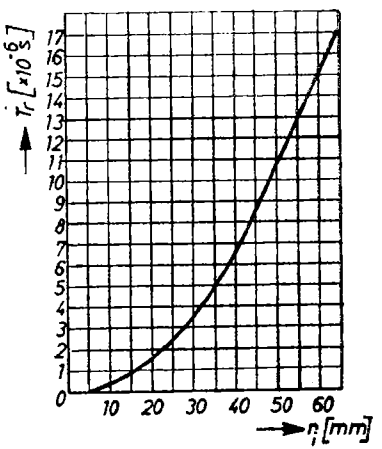


Fig. 3.10. Timpul de răspuns al tuburilor cu $m = 1,1$.

răspuns cu ajutorul relației (3.29) ce reprezintă soluția aproximativă, se observă că raportul între valorile timpilor de răspuns este egal cu raportul grosimilor de perete, la pătrat

$$\frac{T_{r1}}{T_{r2}} = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}. \tag{3.41}$$

În tabelul 3.4 se prezintă timpul de răspuns pentru diferite valori ale razei interioare a tubului și raportul $m = 1,1$, valori

Tabelul 3.4

Timpul de răspuns T_r pentru diferite raze r_i la $m = 1,1$

r_i, mm	8	10	32	64
T_r, μs	0,264375	1,0575	4,23	16,92

calculate cu soluția exactă (3.39). În tabelul 3.5 se prezintă timpul de răspuns calculat cu soluția aproximativă (3.29).

Tabelul 3.5

Timpul de răspuns T_r' pentru diferite grosimi de tub

δ, mm	0,8	1,6	3,2	6,4
T_r', μs	0,268	1,072	4,288	17,152

Este clar că la grosimi mari ale peretelui tubului rezistiv soluția exactă oferă o rezolvare corectă a problemei timpului de răspuns, iar la grosimi mici ale peretelui tubului rezistiv, soluția aproximativă oferă o rezolvare comodă și suficient de exactă pentru cele mai multe aplicații practice.

3.2.3. *Comportarea instalației de măsurare în ansamblu*

În paragrafele 3.2.1 și 3.2.2 s-a analizat comportarea intrinsecă a șuntului coaxial reprezentat, în structura sa de bază, sub forma unui conductor tubular. În utilizările practice, șuntul este introdus într-o schemă de măsurare, ca în fig. 3.11. Șuntul este reprezentat prin rezistența R, iar legătura cu osciloscopul catodic OC este realizată prin intermediul cablului de măsurare coaxial C_m, care se închide cu impedanța constituită de o rezistență neinductivă Z_c, egală cu impedanța caracteristică a cablului de măsurare. Prin șunt trece curentul intens $i - i_2$, iar prin circuitul de măsurare curentul i_2 sensibil mai mic decît curentul intens i. Între bornele a și b ale impedanței terminale se culege tensiunea u. În fig. 3.12 se prezintă o schemă electrică echivalentă, corespunzătoare montajului indicat în fig. 3.11.

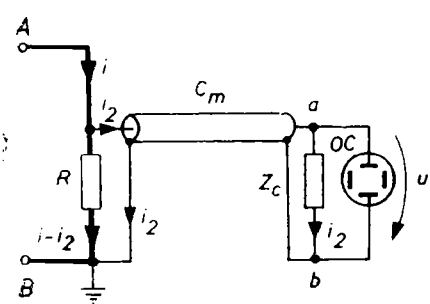


Fig. 3.11. Schemă de măsurare cu șunt coaxial.

În schemă electrică menționată se admite existența inductivităților L_1 în circuitul de curent intens, L_2 în circuitul de măsurare ca și posibilitatea existenței unei inductivități mutuale M între cele două circuite.

Şuntul ideal. Dacă şuntul coaxial este considerat că nu filtrează nici o armonică de curent şi deci dacă se face abstracţie de refularea curentului în regim tranzitoriu, ecuaţiile de funcţionare ale schemei din fig. 3.12 sînt următoarele [32]:

$$(i - i_2)\, R = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u\,; \qquad (3.42)$$

$$i_2 = \frac{u}{Z_c} \text{ sau } \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{Z_c} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

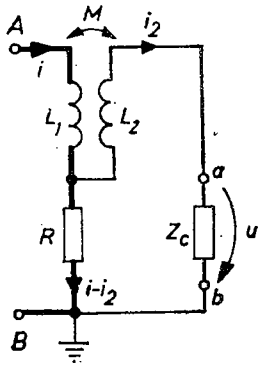


Fig. 3.12. Schema echivalentă a instalaţiei din fig. 3.11.

Comportarea sistemului de măsurare rezultă din analiza răspunsului la excitaţia treaptă de curent, adică $i = I$, la $t > 0$ şi $i = 0$ la $t < 0$. În aceste condiţii, se obţine răspunsul în tensiune

$$u = I \left[\frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{L_2} \right) \mathrm{e}^{-t/\tau} \right], \qquad (3.43)$$

unde:

$$a = Z_c R\,;\ b = Z_c + R\,;\ C = Z_c M\,;\ \tau = L_2/b. \qquad (3.44)$$

Analiza expresiei (3.43) conduce la următoarele variante de răspuns, reprezentate în fig. 3.13.

Răspuns subcompensat. Dacă se îndeplinesc condiţiile:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{L_2} < \frac{a}{b}\,;\ \frac{a}{b} - \frac{c}{L} > 0, \qquad (3.45)$$

se obţine răspunsul din fig. 3.13, *a*.

Răspuns exponenţial. Dacă inductivitatea mutuală M este nulă, răspunsul are forma

$$u = I \frac{a}{b} (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad (3.46)$$

şi este reprezentat în fig. 3.13, *b*. Prin construcţia sa, şuntul coaxial îndeplineşte condiţia $M = 0$. Timpul de răspuns, corespunzător

acestei condiții, rezultă $T_r = \tau = L_2/(Z_c + R)$. Pentru a diminua timpul de răspuns este necesar a se reduce la maximum valoarea inductivității L_2 din circuitul de măsurare, ceea ce practic se realizează prin introducerea structurii coaxiale pentru cablul de măsu-

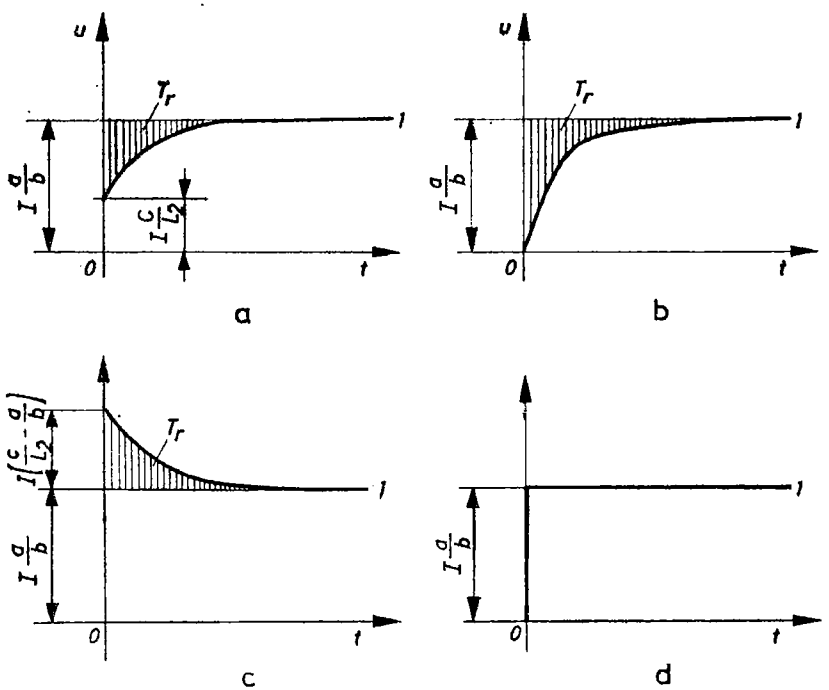


Fig. 3.13. Răspunsuri posibile:
a — subcompensat; *b* — exponențial; *c* — supracompensat; *d* — compensat.

rare C_m și impedanța de sarcină Z_c. De asemenea, adoptarea unor valori sporite pentru rezistența în curent continuu a șuntului, ca și pentru impedanța caracteristică a cablului de măsurare, constituie măsuri eficiente pentru diminuarea timpului de răspuns.

Răspuns supracompensat. Dacă este îndeplinită inegalitatea

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{L_2} < 0,$$

se obține răspunsul din fig. 3.13, *c*, care pentru $t = 0$ depășește valoarea stabilizată $I(a/b)$.

Răspuns compensat. Dacă în mod voit se realizează un cuplaj magnetic între circuitele de curent intens și de măsurare și este îndeplinită condiția $a/b = c/L_2$, adică

$$\frac{R}{Z_c + R} = \frac{M}{L_2}, \tag{3.47}$$

se obține răspunsul de forma treptei

$$u = I(a/b), \tag{3.48}$$

adică, excitației treaptă de curent îi corespunde un răspuns treaptă de tensiune. O asemenea instalație de măsurare este ideală, în ce privește măsurarea curenților de impuls. Efectul pelicular tranzitoriu nu se poate anula, dar prin utilizarea unor șunturi cu pereți extrem de subțiri — de exemplu 10 μm — comportarea intrinsecă a șuntului se apropie de cea ideală. Prin realizarea unui cuplaj de inductivitate mutuală M, după relația (3.47), se poate compensa prezența inductivității L_2 din circuitul de măsurare.

Șuntul cu efect pelicular tranzitoriu. Dacă șuntul este destinat a măsura curenți intenși, este necesar ca peretele tubului rezistiv să aibă grosimi mai mari, de exemplu 0,5...3 mm. În acest caz, în schema circuitului de măsurare, șuntul trebuie să fie reprezentat printr-un cuadripol echivalent [62], spre exemplu de tipul celui prezentat în fig. 3.14, format din două rezistențe $2R$ și inductivitatea L. Răspunsul în tensiune u_2 la excitația treaptă de curent $i = I$ al acestui cuadripol este

$$u_2(t) = RI(1 - e^{-\frac{4R}{L}t}). \tag{3.49}$$

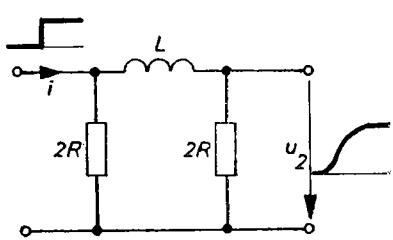


Fig. 3.14. Cuadripol echivalent al șuntului coaxial.

Există două condiții de echivalență, pentru cuadripolul prezentat în fig. 3.14 și anume:

a) Răspunsul cuadripolului echivalent la $t \to \infty$ să fie egal cu răspunsul, la $t \to \infty$, dat de relațiile (3.26) și (3.38), care reprezintă răspunsul conductorului tubular la excitația treaptă de curent în rezolvarea aproximativă, respectiv cea exactă.

Din relația (3.49) se obține

$$\lim_{t\to\infty} u_2(t) = RI; \tag{3.50}$$

din relația (3.26) se obține

$$\underset{t\to\infty}{u_i} = \frac{I}{2\pi r_i \delta} \cdot \frac{l}{\sigma} = R_{cc} I ; \tag{3.51}$$

din relația (3.38) se obține

$$\underset{t\to\infty}{u_i} = \frac{I}{\pi(r_e^2 - r_i^2)} \cdot \frac{l}{\sigma} = R_{cc} I. \tag{3.52}$$

Cu R_{cc} s-a notat rezistența conductorului tubular, măsurată în curent continuu. Din compararea relației (3.50) cu (3.51) respectiv cu (3.52) rezultă că

$$R = R_{cc}, \tag{3.53}$$

adică, în cuadripolul echivalent, rezistența R are aceeași valoare cu rezistența în curent continuu a conductorului rezistiv tubular al șuntului coaxial.

b) Timpul de răspuns al cuadripolului echivalent să fie egal cu timpul de răspuns al conductorului tubular. Timpul de răspuns al cuadripolului echivalent, cu răspunsul din relația (3.49), este

$$T_{r\pi} = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\frac{4R}{L} t})]\, dt = \frac{L}{4R} \tag{3.54}$$

Timpul de răspuns al conductorului tubular, în soluția aproximativă, este dat de relația (3.29). Rezultă condiția de echivalență

$$L = \frac{2}{3} \sigma \mu_0 \delta^2 R.$$

Dacă, în această relație se introduce $R = l/(2\pi r_i \delta \sigma)$ se obține

$$L = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu_0 \delta l}{2\pi r_i}. \tag{3.55}$$

Pentru un șunt coaxial de 1 000 A; 1 s [36], cu $r_e = 32{,}2$ mm; $r_i = 32$ mm; $l = 154$ mm, $\sigma = 2.10^6$ S/m; $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m; $R_{cc} = 0{,}002\ \Omega$, s-a trasat, în fig. 3.15, răspunsul calculat cu relația (3.29), marcat cu reperul *1* și răspunsul dat de cuadripolul echivalent, calculat cu relația (3.49), marcat cu reperul *2*.

Schema echivalentă a circuitului de măsurare, care cuprinde şuntul reprezentat printr-un cuadripol în π, cablul de măsurare

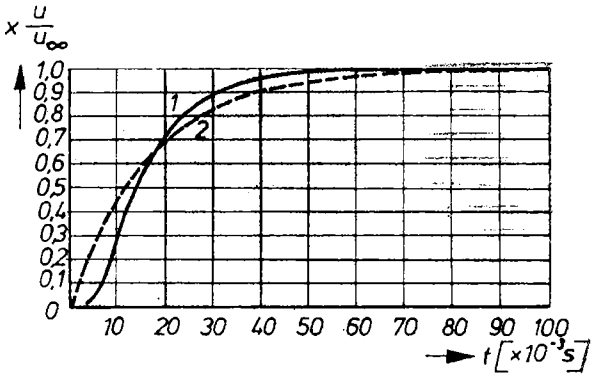


Fig. 3.15. Răspunsul intrinsec al şuntului coaxial: *1* — şunt de 2 m Ω; *2* — cuadripol echivalent.

terminat cu impedanţa caracteristică Z_c ca şi un cuplaj inductiv între circuitul de curent intens şi cel de măsurare, este prezentată în fig. 3.16. Ecuaţiile de funcţionare ale acestei scheme sînt:

$$2R(i - i_3) + L\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} - 2R(i_3 - i_2) = 0; \tag{3.56}$$

$$2R(i_3 - i_2) - u - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0; \tag{3.57}$$

$$u = Z_c i_2. \tag{3.58}$$

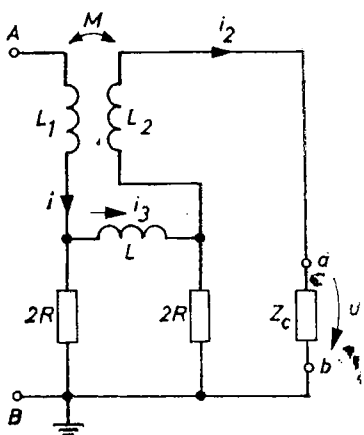


Fig. 3.16. Schema electrică a sistemului de măsurare.

Prin aplicarea transformării Laplace sistemului de ecuaţii (3.56) ... (3.58) şi pentru excitaţia treaptă de curent, adică $i = I$ şi $\mathfrak{L}i = I/p$ se obţine soluţia în domeniul imagine

$$u(p) = I\frac{MZ_c}{L_2}\cdot\frac{p^2 + \frac{4R}{L}p + \frac{4R^2}{LM}}{p\left[p^2 + 2\frac{RZ}{LL_2}\left(\frac{2L_2 + L}{Z_c} + \frac{L}{2R}\right)p + \frac{4RZ}{LL_2}\left(\frac{R}{Z_c} + 1\right)\right]} \tag{3.59}$$

și soluția în original

$$u(t) = I\frac{RZ_c}{R+Z_c}(1 + Ae^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\omega_e t + Be^{-\alpha t}\,\mathrm{ch}\,\omega_e t) \qquad (3.60)$$

unde :

$$\omega_e = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2};\quad \alpha^2 > \omega_0^2;$$

$$\alpha = \frac{RZ_c}{LL_2}\left(\frac{2L_2 + L}{Z_c} + \frac{L}{2R}\right);$$

$$\omega_0^2 = \frac{RZ_c}{4LL_2}\left(1 + \frac{R}{Z_c}\right); \qquad (3.61)$$

$$A = \frac{2(R+Z_c)}{LL_2\omega_e}\left(2M - \frac{LM\alpha}{2R} - \frac{2R\alpha}{\omega_0^2}\right);$$

$$B = \frac{2(R+Z_c)}{LL_2\omega_e}\left(\frac{LM\omega_e}{2R} - \frac{2R\omega_e}{\omega_0^2}\right).$$

Timpul de răspuns calculat cu relația generală (2.8), considerînd răspunsul indicial corespunzător relației (3.60) rezultă

$$T_r = A\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\omega_e t\,dt + B\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\mathrm{ch}\,\omega_e t\,dt;$$

după efectuarea calculelor se obține

$$T_r = \frac{A\omega_e + B\alpha}{\omega_0^2}. \qquad (3.62)$$

La un șunt coaxial necompensant, inductivitatea mutuală $M = 0$. Cu această condiție răspunsul dat de relația (3.60) devine

$$u(t) = I\frac{RZ_c}{R+Z_c}\left[1 - e^{-\alpha t}\left(\mathrm{ch}\,\omega_e t + \frac{\alpha}{\omega_e}\,\mathrm{sh}\,\omega_e t\right)\right], \qquad (3.63)$$

iar timpul de răspuns corespunzător, calculat cu relația (2.8), devine

$$T_r = 2\,\alpha/\omega_0^2. \tag{3.64}$$

Timpul de răspuns dat de relația (3.64) corespunde sistemului format din șunt și cablul de măsurare, cu schema de principiu prezentată în fig. 3.17. În fig. 3.18 s-au trasat :

— curba *1* a răspunsului circuitului de măsurare care include $L_2 = 1{,}625 \cdot 10^{-7}$ H și $Z_c = 75\Omega$;

— curba *2* a răspunsului sistemului de măsurare care include și șuntul coaxial de 1000 A—1 s cu $R = 2\text{m}\Omega$; $L = 1{,}34 \cdot 10^{-10}$ H.

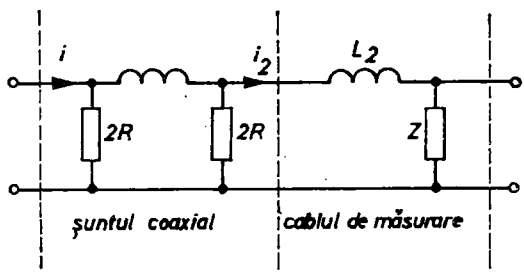


Fig. 3.17. Schema electrică a sistemului de măsurare $M = 0$.

Timpul de răspuns al circuitului de măsurare în cazul menționat este

$$T_{r2} = L_2/Z_c = 2{,}16 \cdot 10^{-9}\text{ s}; \tag{3.65}$$

iar timpul de răspuns al circuitului echivalent pentru șunt este

$$T_{r1} = L/4R = 16{,}75 \cdot 10^{-9}\text{ s}. \tag{3.66}$$

Timpul de răspuns al sistemului de măsurare rezultă

$$T_r = T_{r1} + T_{r2} = 18{,}91^{-9}\text{ s}. \tag{3.67}$$

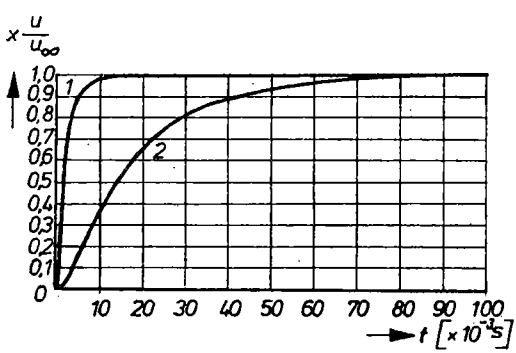


Fig. 3.18. Răspunsuri indiciale :
1—răspunsul circuitului (fără șunt) ; *2*—răspunsul circuitului cu șunt.

Observație importantă. În cazul determinării experimentale a timpului de răspuns al unui sistem de măsurare ce include un șunt coaxial, este necesar a se ține seama de faptul că excitația treaptă de curent reprezintă o idealizare, după cum s-a arătat la § 2.1.4 și că oscilografui are un timp de răspuns propriu. În consecință, pentru a

obține un acord între valorile măsurate și cele calculate este necesar ca, în lanțul de cuadripoli din fig. 3.17, să se introducă, în amonte, un cuadripol echivalent generării unei rampe de curent, și în aval, cuadripolul echivalent oscilografului catodic. În orice împrejurare, timpul de răspuns măsurat pe oscilogramă este mai mare decît cel calculat cu relația (3.67). Astfel, pentru un șunt construit de 1000 A — 1 s, pe oscilogramă s-a măsurat timpul de răspuns de $27 \cdot 10^{-9}$ s, în timp ce din relația (3.67) rezultă timpul de răspuns de $18{,}91 \cdot 10^{-9}$ s.

3.2.4. *Compensarea schemei de măsurare care include un șunt cu pereți subțiri*

Urmărind ideea de a obține, pentru ansamblul sistemului de măsurare, un timp de răspuns cît mai redus, este necesar a se realiza schema de principiu din fig. 3.16, care comportă o inductivitate mutuală M între circuitul de curent intens parcurs de curentul i și cel de curent, de măsurare, parcurs de curentul i_2, în care șuntul este reprezentat printr-un cuadripol echivalent, după cum s-a arătat la paragraful 3.2.3. În fig. 3.19 se prezintă schița constructivă a șuntului coaxial cu ajutorul căruia se realizează cuplajul menționat. Elementele componente ale acestui șunt sînt identice cu cele pre-

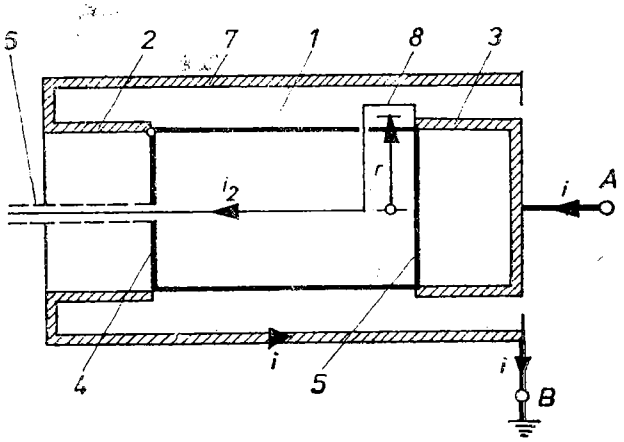


Fig. 3.19. Dispoziție constructivă pentru realizarea unei inductivități mutuale.

zentate în fig. 3.7, cu excepția bobinei *8* parcursă de curentul i_2, bobină care se așază între tubul rezistiv *1* și ecranul *7*, deci în cîmpul magnetic al tubului respectiv parcurs de curentul intens i.

Tensiunea de măsurat este de forma celei prezentate de relația (3.1) în care tensiunea indusă $d\Phi/dt$ este controlată ca amplitudine prin dimensiunile geometrice ale bobinei *8* din fig. 3.19. Alura tensiunii care se aplică oscilografului este dată în fig. 3.20 de curba *1*, unde se vede cum această curbă intersectează valoarea stabilizată, o dată la creștere, în punctul *A*, și o dată la descreștere, în punctul *B*. Valoarea vîrfului u_{max} depinde de inductivitatea mutuală *M*. Răspunsul schemei necompensate este indicat prin curba *2*. Se poate constata că, prin acest mod de compensare, timpul de răspuns, definit de relația (2.8), se diminuează.

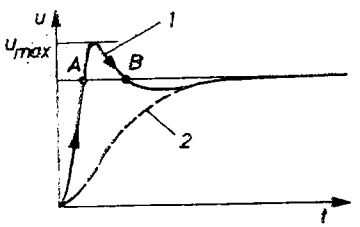


Fig. 3.20. Răspunsuri indiciale : *1* — compensat ; *2* — natural.

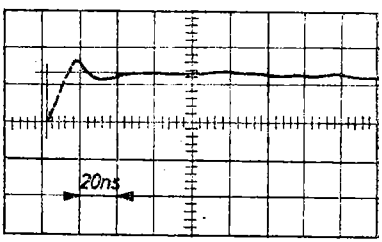


Fig. 3.21. Oscilograma unui răspuns indicial la un șunt de 2 m Ω compensat.

Prima încercare de a realiza o astfel de compensare a fost făcută de Eatoc și Lago [45], practicînd o trecere a conductorului de măsurare la 1/3 din lungimea tubului rezistiv. S-a dovedit însă că în acest mod se realizează numai compensarea șuntului și nu a schemei întregi [35].

Pentru a realiza compensarea schemei, în totalitatea ei, se are în vedere schema de principiu din fig. 3.16 și expresia timpului de răspuns din relația (3.62). Dacă în această relație se pune condiția ca timpul de răspuns să fie egal cu zero, se obține valoarea inductivității mutuale

$$M = \frac{2R\alpha}{\omega_0^2}. \tag{1.68}$$

Pentru dimensionarea bobinei de compensare, reperul *8* din fig. 3.19, se utilizează în primă aproximație relația

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi r} NA, \tag{3.69}$$

în care : *N* este numărul de spire, iar *A*-aria definită de bobină.

În fig. 3.21 se prezintă oscilograma unui sistem de măsurare compensat, în componența căruia intră un șunt coaxial de 1 000A—

1 s cu datele $R = 2 \cdot 10^{-3}\ \Omega$; $L = 1{,}34 \cdot 10^{-10}$ H; $Z_c = 75\ \Omega$; $L_2 = 1{,}625 \cdot 10^{-7}$ H; $\omega_0^2 = 2{,}76 \cdot 10^{16}\ s^{-2}$; $\alpha = 2{,}6 \cdot 10^8\ s^{-1}$; $\omega_e = 2 \cdot 10^8\ s^{-1}$. Compensarea teoretică realizată cu relația (3.68) conduce la $M = 3{,}768 \cdot 10^{-11}$ H. În practică, s-a luat $M = 1{,}685 \cdot 10^{-11}$ H, pentru a diminua din vîrful răspunsului tranzitoriu.

Compensarea schemei de măsurare prin metoda bobinei plasată în cîmpul magnetic al curentului intens își găsește utilitate în schemele de măsurare care utilizează șunturi cu pereți relativ subțiri (0,2 ... 0,4 mm). Pentru pereți mai groși, urmărind realizarea condiției de compensare (3.68), vîrful tensiunii induse în bobină devine extrem de mare și apare detașat, în timp, față de restul răspunsului.

3.2.5. *Compensarea schemei de măsurare care include un șunt cu pereți groși*

Pentru curenți măsurați, de ordinul zecilor de kA, peretele tubului rezistiv poate ajunge la grosimi de aproximativ 1 ... 3 mm, din considerente de stabilitate termică și electrodinamică. În aceste cazuri se preferă o compensare bazată pe ideea *sistemelor compensabile cu fază minimă*, numite și *sisteme reversibile*, conform clasificării din anexa 2. În acest scop, este necesar a se determina funcția de transfer a șuntului și a se găsi o *rețea de corecție* a cărui funcție de transfer să fie inversul funcției de transfer a șuntului. În acest mod, semnalul de ieșire aplicat oscilografului nu va suferi distorsiuni în raport cu semnalul de intrare [27, 68].

Funcția de transfer a șuntului. În fig. 3.22 se prezintă schema electrică echivalentă a șuntului, care comportă inductivitatea mutuală M. Cu notațiile scrise pe desen, ecuațiile de funcționare sînt:

$$2Ri_1 = L\frac{\mathrm{d}(i - i_1)}{\mathrm{d}t} + 2R(i - i_1); \tag{3.70}$$

$$u_1 = 2R(i - i_1) + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{3.71}$$

Prin transformări succesive se obține funcția de transfer căutată

$$\mathcal{H}(\mathrm{p}) = \frac{\mathfrak{L}u}{R\mathfrak{L}i} = \frac{\dfrac{LM}{2R^2}\mathrm{p}^2 + \dfrac{2M}{R}\mathrm{p} + 2}{\dfrac{L}{2R}p + 1}. \tag{3.72}$$

Funcţia de transfer a reţelei de corecţie. În fig. 3.23 se indică o reţea formată din inductivitatea L_3, rezistenţele R_1, R_2, Z_c şi capacitatea C a cărui funcţie de transfer este inversa funcţiei de

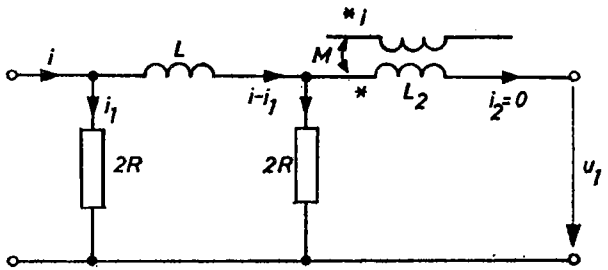


Fig. 3.22. Circuitul echivalent a şuntului.

transfer din relaţia (3.72). Cu notaţiile din fig. 3.23, ecuaţiile de funcţionare sînt :

$$u_1 = L_3 \frac{di}{dt} + R_1 i_1 ;$$

$$R_1 i_1 = \frac{1}{C}\int_0^t i_2 dt + u_2 ;$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_2 dt = R_2(i - i_1 - i_2) ; \qquad (3.73)$$

$$i - i_1 = \frac{u_2}{Z_c}.$$

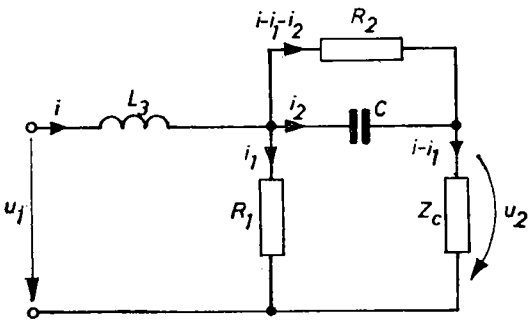


Fig. 3.23. Circuitul echivalent al reţelei de corecţie.

Funcţia de transfer corespunzătoare este

$$\mathcal{H}_2(p) = \frac{\mathfrak{L}u_2}{\mathfrak{L}u_1} = \frac{CR_2 p + 1}{L_3 C\left(\frac{R_2}{Z_c} + \frac{R_2}{R_1}\right)p^2 + \left(\frac{L_3}{Z_c} + \frac{R_2 L_3}{R_1 Z} + CR_2 + \frac{L_3}{R_1}\right)p + \frac{R_2}{Z_c} + 1}. \qquad (3.74)$$

Pentru a determina parametrii reţelei de corecţie din fig. 3.23, se echivalează coeficienţii corespunzători ai polinoamelor de la numitor şi numărător, adică :

$$\frac{R_2}{Z_c} + 1 = 2 ; \qquad (3.75)$$

$$CR_2 = \frac{L}{2R}; \tag{3.76}$$

$$\frac{L_3}{Z_c} + \frac{R_2 L_3}{R_1 Z_c} + CR_2 + \frac{L_3}{R_1} = \frac{2M}{R}; \tag{3.77}$$

$$L_3 C \left(\frac{R_2}{Z_c} + \frac{R_2}{R_1} \right) = \frac{LM}{2R^2}. \tag{3.78}$$

Din relațiile (3.75) ... (3.78) se determină valori pentru R_1, R_2, L_3 și C:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{RL}{M - L_0/2}; \\ R_2 &= Z_c; \\ C &= \frac{L_0}{2RZ_c}; \\ L_3 &= CZ_c^2. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Se observă astfel că R_2, C, L_3 nu depind de inductivitatea mutuală M și că numai R_1 depinde de această inductivitate. Se mai constată că, pentru ca R_1 să capete valori pozitive, este necesar ca

$$M > \frac{L_0}{2} \tag{3.80}$$

Cuplajul magnetic între circuitul de curent intens și cel care transmite semnalul la osciograf se poate realiza fie după schema prezentată în fig. 3.27, fie prin introducerea unei bobine între cilindrul rezistiv și ecran. Inductivitatea mutuală realizată cu această bobină are expresia

$$M = \frac{\mu_0 bN}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \tag{3.81}$$

unde: N este numărul de spire al bobinei;

b — dimensiunea logitudinală a bobinei;

r_1, r_2 — razele pe care sînt plasate laturile externe ale bobinei.

În realizarea practică [38], valorile pentru R_2, C, L_3 se pot lua cele rezultate din relațiile (3.79), în timp ce, valoarea rezistenței R_1 se reglează față de cea calculată din cauza aproximărilor acceptate în stabilirea schemelor echivalente pentru șuntul coaxial și pentru rețeaua de corecție.

În fig. 3.24 se prezintă schema electrică a instalației de măsurare care cuprinde șuntul *1*, rețeaua fizică *2*, cablul coaxial *3* terminat cu impedanța caracteristică Z_c și osciloscopul catodic *4*. Este de observat că, rețelei de corecție schițată în fig. 3.23 îi co-

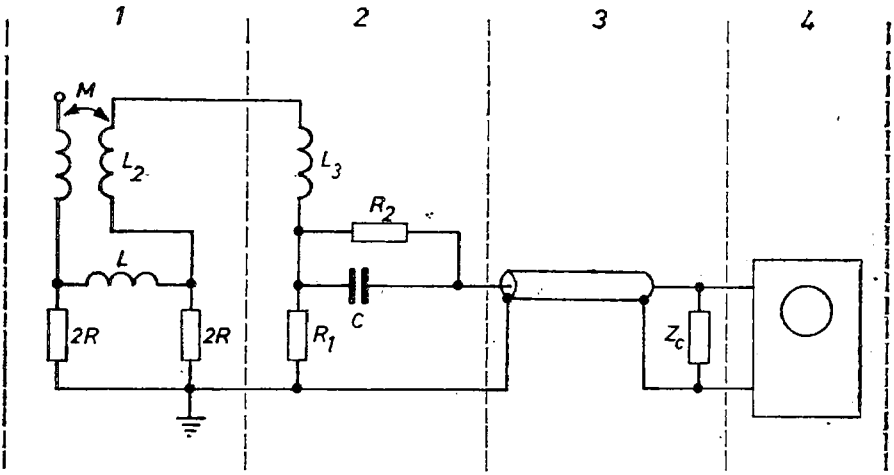


Fig. 3.24. Schemă de măsurare completă.

respunde, în schema 3.24, rețeaua fizică *2* și cablul coaxial *3* terminat cu impedanța caracteristică Z_c.

Compensarea instalației de măsurare, prin metoda rețelei de corecție, oferă posibilitatea reducerii sensibile a timpului de răspuns a instalației de măsurare. Astfel, în fig. 3.25 se prezintă [28] osci-

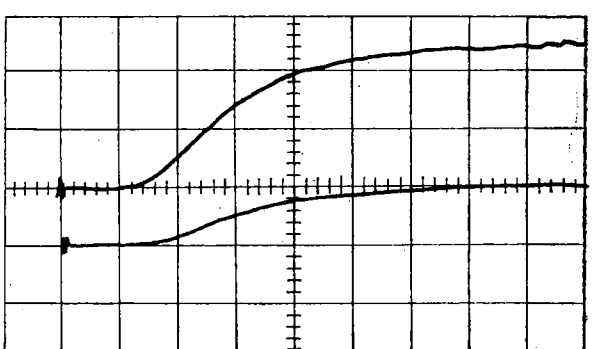


Fig. 3.25. Răspuns de 125 ns al unui șunt de 7,5 kA, necompensat; 50 ns/div.

lograma răspunsului la excitaţie treaptă de curent a unui şunt necompensat de 7,5 kA, cu un timp de răspuns de 125 ns, iar în fig. 3.26 răspunsul aceluiaşi şunt compensat, cu un timp de răspuns de 14 ns.

Pentru crearea unui cuplaj magnetic între circuitul de curent intens şi cel de măsurare, A. Schwab [62] realizează un şunt format din bare circulare dispuse pe generatoarele unui cilindru.

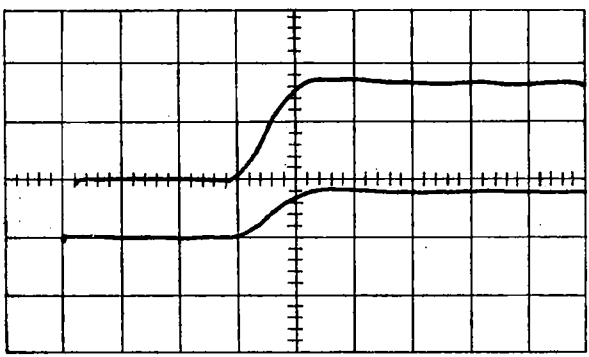


Fig. 3.26. Răspuns de 14 ns al unui şunt de 7,5 kA,compensat ; 25 ns/div.

Astfel cîmpul magnetic al barelor pătrunde, printre bare, în zona buclei de măsurare.

O dispoziţie convenabilă, preconizată de autori [39], constă în menţinerea structurii coaxiale a şuntului şi realizarea unui cuplaj, controlabil prin calcul, între circuitul de curent intens şi cel de măsurare, ca în fig. 3.27. Curentul i, care trece prin cilindrul rezistiv *1*, parcurge radial conductoarele *3*. Paralel cu aceste conductoare se află conductoarele *2*, prin care se colectează curentul de măsurare i_2. Inductivitatea mutuală reglabilă se realizează prin modificarea distanţei d între cele două circuite.

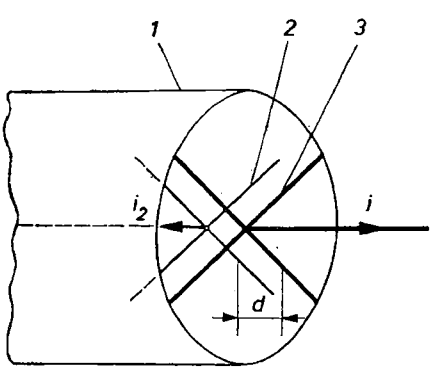


Fig. 3.27. Modalitate de a cupla magnetic circuitul de curent intens cu cel de măsurare.

3.2.6. *Elemente de proiectare*

Construcţia unui şunt, destinat a măsura curenţi cu variaţii rapide, presupune alegerea unor materiale potrivite, în ceea ce priveşte calitatea şi dimensiunile, determinarea solicitărilor termice şi electrodinamice ce apar în unele componente ale şuntului, ca şi eliminarea interferenţelor posibile.

Materialul rezistiv. Acesta se alege din categoria materialelor cu rezistivitate cît mai mare, dar cu un coeficient de temperatură al rezistivităţii cît mai redus. Din această categorie face parte manganina 86 Cu 2 Ni 12 Mn [41, 44] ale cărei proprietăţi fizice sînt următoarele :

Rezistivitatea . . . . . $\rho = 0{,}435 \cdot 10^{-6}\ \Omega m$;
Coeficientul de temperaturi al rezistivităţii $\alpha_R = \pm 1 \cdot 10^{-5}\ grd^{-1}$;
Căldura volumică . . . . . $c_1 = 3{,}4 \cdot 10^6\ Ws/m^3 \cdot grd$;
Densitatea . . . . . $\rho_D = 8{,}4 \cdot 10^3 kg/m^3$;
Temperatura de topire . . . . . $\theta_{top} = 960°C$.

Se pot alege ca materiale rezistive şi materiale de tip constantan, dar, în acest caz, este necesar să se observe că acesta are coeficientul de temperaturi al rezistivităţii $\alpha_R = -3 \cdot 10^{-5}$ grd, mai mare decît al manganinei.

Solicitări termice. Şuntul poate funcţiona în felurite regimuri : regim permanent, de scurtă durată, de impuls. Limita de temperatură a materialului rezistiv se stabileşte, în funcţie de variaţia de rezistenţă, de la rece la cald, care se acceptă de cîteva fracţiuni de procente. Pe de altă parte, la determinarea grosimii peretelui tubului rezistiv, există două cerinţe contradictorii şi anume :

a) În conformitate cu relaţia (3.29) a timpului de răspuns, urmărindu-se o valoare cît mai redusă a acestuia, rezultă o grosime mică a peretelui tubului retistiv

$$\delta = \sqrt{6 \rho T_r / \mu_0}. \tag{3.82}$$

b) Pentru intensităţi mari ale curentului care se măsoară, este necesar, conservînd limita de temperatură, să se admită grosimi mari ale peretelui tubului rezistiv.

Grosimea peretelui tubului rezistiv se alege în funcţie de precizia cerută asupra măsurării şi de regimul de încărcare al şuntului.

Regimul permanent. Deoarece supratemperatura pe care o poate lua un şunt este sub 200 grd, se poate admite că în acest interval

de temperatură rezistivitatea variază liniar de la temperatura de preîncălzire θ_p la temperatura θ_t după relația:

$$\rho = \rho_p[1 + \alpha_R(\theta_t - \theta_p)] = \rho_p[1 + \alpha_R \theta_s], \tag{3.83}$$

în care: ρ_p este rezistivitatea la temperatura de preîncălzire;
$\theta_s = \theta_t - \theta_p$ — supratemperatura.

Din relația (3.83) rezultă supratemperatura admisibilă, luînd drept criteriu variația de rezistență a șuntului

$$\theta_s = \frac{\Delta\rho}{\rho_p} \cdot \frac{1}{\alpha_R}. \tag{3.84}$$

Raportul $\Delta\rho/\rho_p$ se ia în limitele 0,01 ... 0,02, adică variația de rezistență a șuntului se acceptă a fi 0,1 ... 0,2%. Densitatea de curent J se poate determina [32] imediat

$$J = \sqrt{\frac{\alpha l_p \theta_s}{k_a \rho_p A}}, \tag{3.85}$$

unde: α este transmisivitatea căldurii la suprafață periferică a șuntului;
A — aria secțiunii transversale a tubului rezistiv;
l_p — lungimea periferică a tubului rezistiv;
k_a — factorul de majorare a rezistenței datorită refulării curentului.

Transmisivitatea α variază în funcție de condițiile de răcire ale șuntului. Pentru răcire naturală $\alpha \approx 12$ W/m² grd, iar pentru răcire forțată, cu aer, la viteza 10 m/s, $\alpha \approx 80$ W/m² grd [44].

Regimul de scurtă durată. Acesta apare la încercarea întreruptoarelor, cînd durata trecerii curentului prin aparat este mai mică decît 1 s și ca urmare, regimul termic se consideră adiabatic. În mod general, pentru astfel de situații, densitatea de curent echivalentă J_{ec} rezultă [32]

$$J_{ec} = \sqrt{\frac{c_{01}}{k_a \alpha_R \rho_0} \ln \frac{1 + \alpha_R(\theta_p + \theta_s)}{1 + \alpha_R \theta_p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{3.86}$$

unde : este c_{01} căldura volumică la 0°C ;

α_R — valoare medie a coeficientului de temperatură a rezistivității ;

ρ_0 — rezistivitatea la 0°C ;

θ_s — supratemperatura peste temperatura de preîncălzire θ_p ;

t — durata trecerii curentului prin șunt.

La folosirea unui material rezistiv de bună calitate, spre exemplu cu $\alpha_R = \pm 10^{-5}.\text{grd}^{-1}$ și pentru supratemperaturi moderate, spre exemplu $\theta_s < 200$ grd, relația (3.86) ia o formă mai simplă și utilizabilă direct la calculul ariei secțiunii transversale a tubului rezistiv

$$A = \sqrt{\frac{c_{1p}\theta_s}{k_a \rho_p t}}, \tag{3.87}$$

unde c_{1p} și ρ_p sînt valori ale căldurii volumice, respectiv ale rezistivității la temperatura de preîncălzire, spre exemplu temperatura mediului ambiant.

În cazul regimului termic intermitent, caz frecvent într-o stație de încărcări de mare putere, șuntul este supus la solicitări termice repetate, alternate cu pauze de curent. Un astfel de regim este descris cantitativ în lucrările care tratează regimul termic al aparatelor electrice [32].

Regimul excitației treaptă. Acesta este un regim asimilabil cu regimul de încărcare al șunturilor destinate a măsura curenți de impuls, la care durata semiamplitudinii este sensibil mai mare decît durata frontului. Pentru această situație puterea dezvoltată de trecerea curentului prin șunt trebuie calculată ținînd seamă de efectul pelicular tranzitoriu, adică de densitatea de curent variabilă în timp [31]. În acest scop în relația (A.6.12) se face schimbarea de variabilă $r = r_i + \delta x$, în care δ este grosimea peretelui tubului rezistiv și x este variabila nouă cuprinsă între 0 și 1 ; se obține astfel expresia densității de curent sub forma

$$J(x, t) = \frac{I}{2\pi(r_i + \delta x)}\left[1 + \sum_1^{\infty} (-1)^k (2 \cos k\pi x)\, e^{-\frac{t}{T_k}}\right]; \tag{3.88}$$

unde

$$T_k = \frac{\sigma \mu_0 \delta^2}{k^2 \pi}. \tag{3.89}$$

Puterea dezvoltată prin efect Joule-Lenz se exprimă în funcţie de densitatea de curent

$$P_J = \int_0^l \frac{J^2(x, t)}{\sigma} 2\pi(r_1 + \delta x) l \delta \, dx, \tag{3.90}$$

unde l este lungimea tubului rezistiv.

După efectuarea calculelor, prezentate în anexa 9, se obţine expresia puterii dezvoltate în tubul rezistiv la timpul t oarecare

$$P_J = P_0 \left[1 + 2 \sum_1^\infty e^{-\frac{2t}{T_k}} \right]. \tag{3.91}$$

unde P_0 reprezintă puterea desvoltată în regim permanent şi deci

$$P_0 = \frac{I^2 l}{2\pi\sigma r_t}. \tag{3.92}$$

Energia suplimentară W_{st}, dezvoltată ca rezultat al efectului pelicular tranzitoriu, rezultă din relaţia (3.91)

$$W_{st} = \int_0^t (P_J - P_0) dt = 2P_0 \int_0^t \sum_1^\infty e^{-\frac{2t}{T_k}} dt \tag{3.93}$$

sau

$$W_{st} = \frac{I^2 l \mu_0 \delta}{2\pi^3 r_t} \left[\sum_1^\infty \left(-\frac{1}{k^2} e^{-\frac{2t}{T_k}} \right) + \sum_1^\infty \frac{1}{k^2} \right]. \tag{3.94}$$

Dacă în relaţia (3.94) se consideră $t=\infty$, se obţine energia suplimentară $W_{s\infty}$ dezvoltată în tubul rezistiv de la apariţia excitaţiei treaptă de curent pînă la un moment, la care practic a dispărut refularea curentului.

$$W_{s\infty} = \frac{\mu_0 I^2 l \delta}{12\pi r_t}. \tag{3.95}$$

Pe de altă parte, energia dezvoltată în regim de curent constant este

$$W_{0t} = P_{0t} = \frac{I^2 l t}{2\pi\sigma\delta r_t}. \tag{3.96}$$

Energia totală dezvoltată în tubul rezistiv rezultă

$$W_t = W_{0t} + W_{st}. \tag{3.97}$$

Pentru a scoate în evidenţă ponderea energiei suplimentare W_{st} faţă de energia totală W_t, în fig. 3.28 s-au trasat următoarele rapoarte : $W_{st}/W_{s\infty}$ curba *1*; $W_{0t}/W_{s\infty}$, curba *2*; $W_t/W_{s\infty}$, curba *3*, pentru un şunt de 60 kA — 1 s, cu caracteristicile $r_i = 84$ mm,

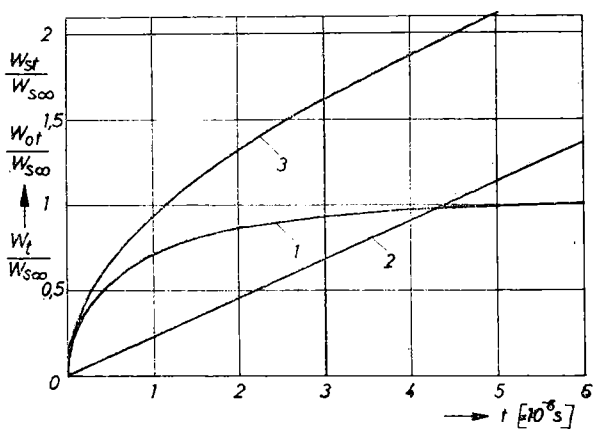


Fig. 3.28. Efectul termic produs de excitaţia treaptă de curent

1 — $W_{st}/W_{s\infty}$;
2 — $W_{0t}/W_{s\infty}$;
3 — $W_t/W_{s\infty}$.

$r_e = 87$ mm, $\delta = 3$ mm ; $l = 246$ mm ; $\sigma_{20} = 2{,}325 \cdot 10^6$ S/m. Pentru acest caz concret, se constată că la aproximativ 4,25 μs energia suplimentară egalează energia dezvoltată în regim de curent constant.

Solicitări electrodinamice. Dacă un şunt coaxial este destinat a măsura curenţi intenşi, de ordinul $10^3 \ldots 10^5$ kA, este util a se calcula forţele electrodinamice care se exercită, pe de o parte, asupra tubului rezistiv, iar pe de altă parte, asupra ecranului.

Forţele electrodinamice exercitate asupra tubului rezistiv. Cîmpul magnetic datorit curentului care trece prin ecran este nul în interiorul ecranului ; ca urmare, cilindrul rezistiv se găseşte sub efectul interacţiunii dintre curentul care îl parcurge şi cîmpul magnetic propriu. În fig. 3.29 se prezintă o construcţie geometrică necesară calculării presiunii ce se exercită asupra tubului rezistiv de rază r_1. Dacă curentul este uniform repartizat la periferia tubului

rezistiv, forța de interacțiune între conductoarele elementare definite la periferia cilindrului de unghiul elementar $d\alpha$ este

$$d^2F = |d^2\mathbf{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i\,d\alpha}{2\pi}\right)^2 \frac{l}{2r\sin\dfrac{\alpha}{2}}. \tag{3.98}$$

Presiunea exercitată pe tubul rezistiv este raportul între componenta radială $d^2F_r = d^2F \sin(\alpha/2)$ și suprafața $r\,d\alpha\,l$, adică

$$p = \int_0^{2\pi} \frac{d^2F \sin\dfrac{\alpha}{2}}{r_1 d\alpha l} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r_1^2}. \tag{3.99}$$

Integrala forței tangențiale $d^2F_t = d^2F \cos\dfrac{\alpha}{2}$ este nulă cînd α variază între 0 și 2π. În concluzie tubul rezistiv este supus unei

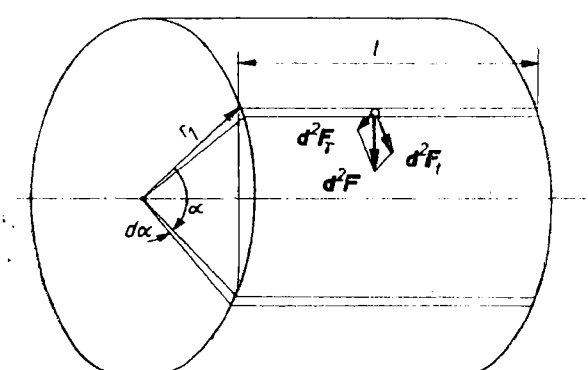


Fig. 3.29. Forțe exercitate asupra tubului rezistiv.

presiuni din exterior către interior, iar valoarea presiunii este dată de relația (3.99). Pentru a calcula forța internă T_1, se secționează tubul rezistiv, ca în fig. 3.30 și se obține

$$T_1 = \frac{p}{2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} r_1 l \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha = p r_1 l. \tag{3.100}$$

Forțe electrodinamice exercitate asupra ecranului. Ecranul se află în cîmpul magnetic al curentului ce trece prin tubul rezistiv și sub acțiunea cîmpului magnetic propriu curentului ce trece prin

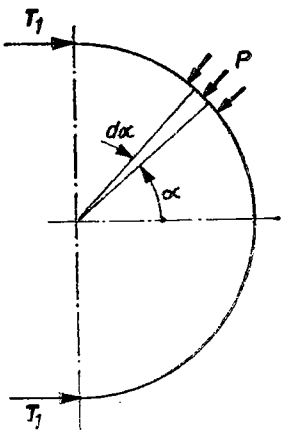


Fig. 3.30. Forța internă T_1 în tubul rezistiv.

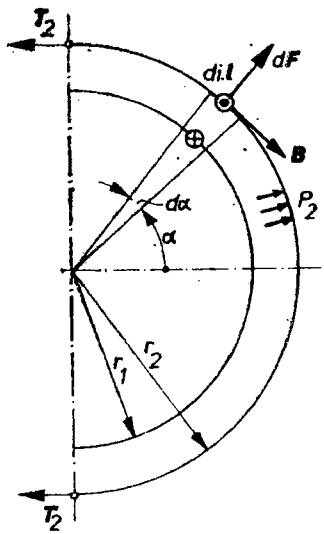


Fig. 3.31. Forțe electrodinamice în ecranul șuntului coaxial.

ecranul de rază r_2. În acord cu relația (3.99), presiunea exercitată asupra ecranului, datorită curentului care circulă prin ecran, este

$$p_1 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r_2^2} \tag{3.101}$$

La periferia ecranului, cîmpul magnetic produs de curentul care parcurge tubul rezistiv are numai o componentă tangențială, de valoarea $H = i/2\pi r_2$. Forța electrodinamică care se exercită asupra unui element de conductor, cu reprezentarea din fig. 3.31, este, ca modul

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}i\, l\mu_0 H = r\,\mathrm{d}\alpha \frac{i}{2\pi r_2} l\mu_0 \frac{i}{2\pi r_2}. \tag{3.102}$$

Presiunea exercitată dinspre interior către exterior rezultă

$$p_2 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi r_2^2} \tag{3.103}$$

Presiunea rezultantă apare ca diferență și anume:

$$p = p_2 - p_1 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r_2^2} \tag{3.104}$$

și este îndreptată din spre interior spre exteriorul ecranului. Acesta este supus la forța de întindere

$$T_2 = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} p r_2 l \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha = p r_2 l. \tag{3.105}$$

Efectul ecranului. Ecranul fiind parcurs de un curent egal și de sens contrar cu curentul din tubul rezistiv, cîmpul magnetic exterior ecranului este nul, abstracție făcînd de efectele de capăt. Ca urmare, asupra unui șunt coaxial ecranat, parcurs de curent, plasat într-un cîmp magnetic, nu se exercită nici o forță.

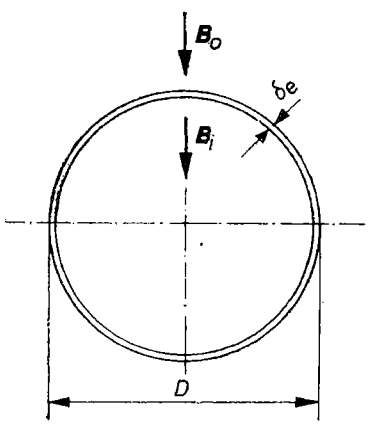


Fig. 3.32. Efectul ecranului.

Semnalul util poate fi influențat de cîmpuri magnetice exterioare, dacă grosimea ecranului și a peretelui tubului rezistiv sînt foarte mici.

Factorul de ecranare k_s, pentru un cîmp magnetic alternativ de frecvență f, este definit, în acord cu notațiile din fig. 3.32, ca raportul între inducția magnetică B_i — în interiorul tubului și inducția magnetică B_0 incidentă — în exteriorul tubului [66]

$$k_B = \frac{B_i}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f T)^2}}, \tag{3.106}$$

unde: $T = \mu D \delta_e / 4\rho$ este constanta de timp a curenților turbionari;

D — diametrul exterior al ecranului;

δ_e — grosimea peretelui ecranului;

ρ — rezistivitatea materialului.

Este de observat că, o ecranare magnetică este realizată și de către tubul rezistiv, căruia, la rîndul lui, i se poate aplica relația (3.106). Pentru scopuri practice realizarea unui ecran de 2 ... 3 mm din cupru constituie o soluție satisfăcătoare.

Adaptarea. La şunturile coaxiale de dimensiuni mari şi cu lungimi mari ale tubului rezistiv, este necesar a se ţine seama de procesul propagării semnalului de măsurare în interiorul şuntului coaxial [20], [34]. În fig. 3.33 se prezintă schematic şuntul coaxial, abstracţie făcîndu-se de prezenţa ecranului. Curentul de măsurare

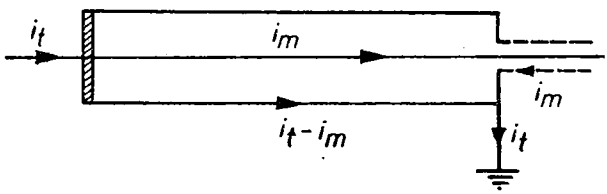


Fig. 3.33. Referitor la fenomenul de propagare.

i_m, care trece prin conductorul central, este cu cîteva ordine de mărime mai mic decît curentul total i_t; prin tubul rezistiv trece curentul $i_t - i_m$. În fig. 3.34 se prezintă schema electrică echivalentă necesară stabilirii procesului de propagare al semnalului de măsurare; L_0, C_0, R_0 sînt respectiv inductivitatea lineică, capacitatea lineică şi rezistenţa lineică. Conductorul central se consideră fără rezistenţă; rezistenţa lineică corespunde numai tubului rezistiv. Se admite că potenţialul punctelor situate pe o generatoare a tubului rezistiv creşte linear, de la extremitatea conectată la pămînt, la cealaltă extremitate în care intră curentul total i_t. Conducţia lineică se neglijează. În aceste condiţii, ecuaţiile diferenţiale ale propagării semnalului util, observînd notaţiile din fig. 3.34, sînt:

$$-\frac{\partial u_m}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}; \tag{3.107}$$

Semnalul de măsurare — o tensiune — rezultă prin trecerea curentului de măsurare i_m prin impedanţa caracteristică Z_c a cablului coaxial.

În anexa 10 se demonstrează pe baza relaţiilor (3.100) şi (3.107) că perioada proprie de oscilaţie a şuntului este

$$T = 4\sqrt{LC} = 4l\sqrt{L_0 C_0}, \tag{3.108}$$

unde inductivitatea și capacitatea lineică se exprimă în funcție de diametrele d_1 al conductorului central și d_2 al tubului rezistiv

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}; \quad C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{d_2}{d_1}}. \tag{3.109}$$

Tot în anexa 10 se arată că, pentru a evita oscilații pe frecvența proprie este necesar ca șuntul să fie *adaptat*, adică impedanța

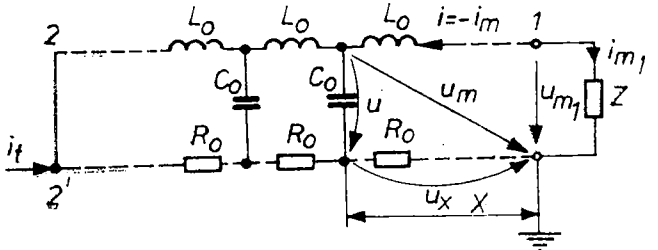


Fig. 3.34. Schema electrică echivalentă pentru fenomenul propagării.

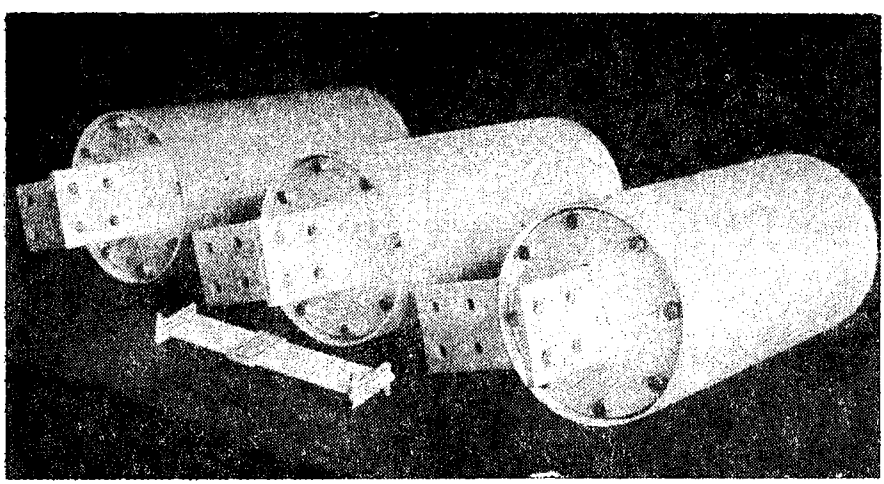


Fig. 3.35. Set de trei șunturi coaxiale 30 kA, 1 s.

internă $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$ să fie egală cu impedanța caracteristică a cablului de măsurare.

În fig. 3.35 se prezintă fotografia unui set de trei șunturi coaxiale de 30 kA—1 s destinate a echipa o stație de încercări de mare putere.

4. Divizoare de tensiune

Folosirea divizoarelor de tensiune drept convertoare, la măsurarea tensiunilor continui, alternative sau de implus, constituie singura posibilitate de a stabili o relaţie de dependenţă practic lineară, pentru un domeniu dat, între mărimea măsurată şi mărimea de intrare într-un oscilograf catodic.

Aprecierea calităţii unui divizor de tensiune se face cu ajutorul unuia din criteriile stabilite în cap. 2, spre exemplu de comportare la excitaţia treaptă de tensiune sau de comportare la excitaţia sinusoidală de frecvenţă variabilă. Cu cît un divizor de tensiune va avea un timp de răspuns mai mic sau o bandă de frecvenţă mai mare, cu atît calitatea lui va fi mai bună.

În structura divizoarelor de tensiune intră rezistoare şi condensatoare ca elemente componente, dar în afara acestora existenţa inductivităţilor intrinseci şi a capacităţilor parazite este de natură să influenţeze sensibil performanţele divizoarelor de tensiune. În fig. 4.1 se prezintă o schemă generală de măsurare, în componenţa

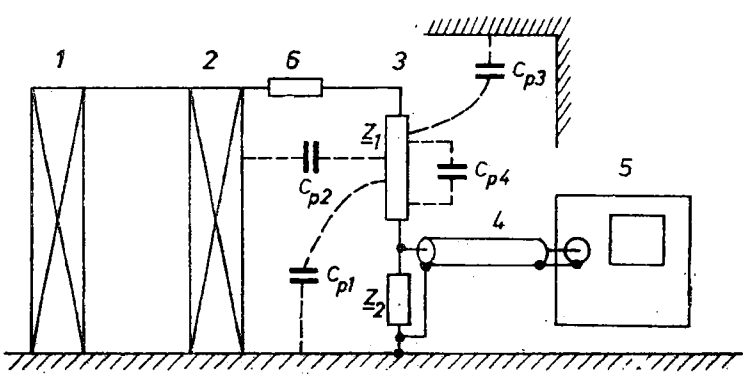


Fig. 4.1. Schema generală de măsurare cu un divizor de tensiune.

căreia intră sursa de tensiune înaltă *1*, obiectul care se încearcă *2*, divizorul de tensiune *3*, cablul de măsurare *4*, oscilograful catodic *5* și rezistența de amortizare *6*. Divizorul de tensiune *3* se compune din două impedanțe: $\underline{Z}_1$ — de înaltă tensiune și $\underline{Z}_2$ — de joasă tensiune, conectate în serie. Prin dimensionarea potrivită a impedanțelor Z_1 și Z_2, la bornele impedanței $\underline{Z}_2$ se culege o tensiune sensibil mai mică, în acord cu sensibilitatea oscilografului, decît tensiunea aplicată întregului divizor. Capacitățile parazite C_{p1}, C_{p2} C_{p3} se stabilesc față de obiectele învecinate, iar capacitatea parazită C_{p4} se stabilește între unele componente ale divizorului.

În prima etapă pare util a se stabili proprietățile intrinseci ale divizoarelor de tensiune, adică acele proprietăți care decurg din faptul că nu se iau în considerare nici inductivitățile intrinseci și nici capacitățile parazite. În aceste condiții, calculele corespunzătoare sînt utile la construcția și utilizarea divizoarelor de tensiune care fac parte din scheme de măsurare cu tensiuni relativ mici, spre exemplu sub 10 kV. Pentru asemenea tensiuni, divizoarele de tensiune au dimensiuni relativ mici, capacitățile parazite și inductivitățile intrinseci sînt mici și se poate face abstracție de procesul propagării undelor electromagnetice în divizor.

În etapa următoare, se consideră divizorul ca o linie cu structură complexă, în care are loc un proces de propagare a undelor electromagnetice, cu considerarea inductivităților intrinseci și a capacităților parazite. În acest ultim concept, divizorul de tensiune are un ancombrament mare și este destinat a servi drept convertor pentru tensiuni înalte, de exemplu 100 ... 5 000 kV.

4.1. Structura simplă a divizoarelor de tensiune

Componentele intrinseci ale divizoarelor de tensiune sînt elemente pasive de tipul condensatorului și rezistorului cu ajutorul cărora se realizează divizoare capacitive, rezistive și mixte.

4.1.1. *Divizorul capacitiv*

Schema electrică a divizorului capacitiv este indicată în fig. 4.2, în care se observă că tensiunea măsurată este u_1, iar tensiunea aplicată oscilografului este u_2, de la bornele rezistenței R_2 de intrare în oscilograf; R_1 este o rezistență egală cu impedanța caracteristică a cablului de măsurare prin care se transmite semnalul

de la divizor la osciloscraf. Rezistența R_2 are în mod uzual valoarea de 1 MΩ, în timp ce $R_1 = 50\ \Omega$ sau $75\ \Omega$. Se constată deci că

$$R_1 + R_2 = R \approx R_2. \tag{4.1.}$$

Cu notațiile din fig. 4.2, ecuațiile de funcționare ale schemei sînt :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{C_1}\int_0^t i\,dt + u_2\,; \\ i &= i_1 + i_2\,; \\ i_1 &= C_2\frac{du_2}{dt}\,; \\ i_2 &= \frac{u_2}{R}\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

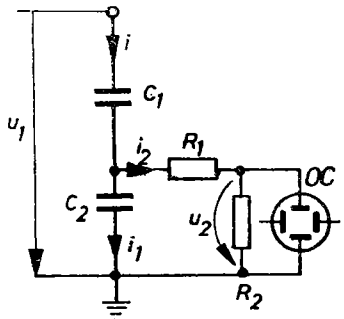


Fig. 4.2. Schema electrică a divizorului capacitiv.

Se obține astfel, ținînd seama și de relația (4.1), răspunsul la excitația treaptă de tensiune U

$$u_2 = U\frac{C_1}{C_1 + C_2}\,e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}} \tag{4.3}$$

și cu caracteristica de frecvență în amplitudine

$$G(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}, \tag{4.4}$$

cu

$$\tau = R(C_1 + C_2). \tag{4.5}$$

După cum rezultă din relațiile (4.3) și (4.5) un divizor de tensiune capacitiv, al cărui braț de joasă tensiune se închide pe o rezistență, nu poate fi folosit la măsurarea tensiunilor de curent continuu, dar poate fi folosit cu succes la măsurarea tensiunilor alternative pînă la frecvențe ridicate, spre exemplu 1 MHz.

Pentru frecvențe foarte ridicate, de ordinul 10 ... 100MHz, se folosesc divizoare de tensiune înglobate în structuri coaxiale, la care inductivitatea intrinsecă a conexiunilor între brațul de înaltă tensiune — capacitatea C_1, în fig. 4.2 — și brațul de joasă tensiune — capacitatea C_2, în fig. 4.2 — este practic nulă. Un astfel de

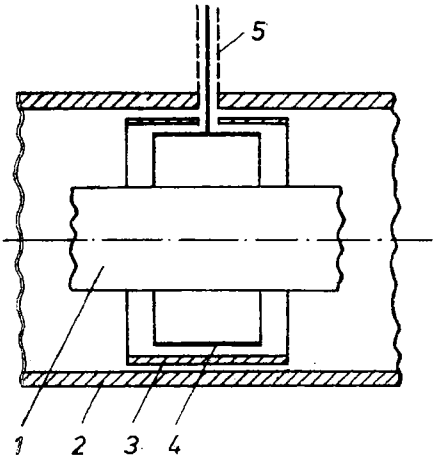


Fig. 4.3. Divizor de tensiune capacitiv în structură coaxială.

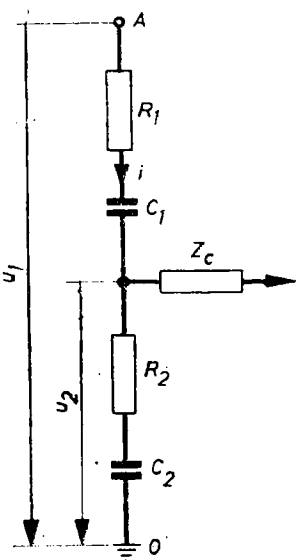


Fig. 4.4. Divizor de tensiune mixt, serie, *RC*.

divizor este prezentat în fig. 4.3. Structura coaxială este realizată între conductorul cilindric central *1* şi conductorul tubular *2*. Armătura cilindrică *4* formează capacitatea C_1 faţă de conductorul *1* şi capacitatea C_2 faţă de conductorul *2*, faţă de care este izolată cu pelicula electroizolantă *3*. Cu ajutorul mufei coaxiale *5*, se realizează legătura la cablul de măsurare. Realizarea unei presiuni de 10 barr în incintă determină o sensibilă creştere a rigidităţii dielectrice şi permite astfel utilizarea divizorului la tensiuni de ordinul 10 ... 30 kV. Măsuri speciale se iau [54, 55] pentru obţinerea unor performanţe deosebite, printre care sînt: ecranarea prizei de măsurare pe armătura *4* şi limitarea lungimii armăturii *4* la o valoare mai mică decît 1/10 din lungimea de undă proprie a structurii coaxiale.

4.1.2. *Divizorul mixt, serie RC*

Proprietăţile acestui tip de divizor rezultă din studiul comportării schemei de bază şi a variantelor ce derivă din această schemă [26].

Schema de bază. În fig. 4.4 se prezintă schema electrică de bază a divizorului de tensiune mixt serie *RC*. Braţul de înaltă tensiune este format din rezistenţa R_1 şi capacitatea C_1, iar cel

de joasă tensiune din rezistența R_2 și capacitatea C_2. Divizorul de tensiune se conectează la plăcile oscilografului catodic prin intermediul unui cablu coaxial. În acest caz, este necesar ca acest cablu să se conecteze la divizor prin intermediul unei rezistențe egală în valoare cu impedanța caracteristică Z_c a cablului de măsurare.

Ecuațiile de funcționare privind tensiunea de intrare u_1 și tensiunea de ieșire u_2 sînt:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R_1 i + \frac{1}{C_1}\int_0^t i\,dt + u_2 \\ u_2 &= R_2 i + \frac{1}{C_2}\int_0^t i\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Răspunsul la excitația treaptă. La excitarea divizorului cu tensiunea treaptă $u_1 = U$, răspunsul rezultă

$$u_2 = U\frac{C}{C_2}\left[1 + \left(\frac{\tau_2}{\tau} - 1\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right], \tag{4.7}$$

unde:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}; \quad R = R_1 + R_2;$$

$$\tau = RC; \qquad \tau_2 = R_2 C_2; \qquad \tau_1 = R_1 C_1.$$

Răspunsul poate lua una din următoarele trei forme:

a. Pentru aceeași constantă de timp în brațul de înaltă tensiune și în brațul de joasă tensiune, adică pentru

$$R_1 C_1 = R_2 C_2 = RC = \tau$$

se obține

$$u_2 = \frac{R_2}{R} U. \tag{4.8}$$

Adică, răspunsul este compensat, de forma treptei ca în fig. 4.5, *a* și deci cu timpul de răspuns zero.

b. Pentru $\tau_2/\tau > 1$ se obține un răspuns supracompensat, ca în fig. 4.5, *b*.

c. Pentru $0<\tau_2/\tau<1$ rezultă un răspuns subcompensat, ca în fig. 4.5, *c*.

La un divizor de tensiune compus din module *RC* identice, la care se practică o priză pentru măsurarea în joasă tensiune, răspunsul este întotdeauna compensat.

La un divizor format din două sau mai multe elemente eterogene există posibilitatea de a avea oricare din cele trei tipuri de răspunsuri.

Caracteristica de frecvență. Această caracteristică oferă posibilități mai largi de apreciere a variantelor de schemă. Funcția de transfer a schemei din figură este

$$\mathcal{G}(p) = \frac{p + 1/\tau_2}{p + 1/\tau}. \qquad (4.9)$$

De aici rezultă caracteristica de frecvență

$$G(j\omega) = \frac{\tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}\left[\frac{1}{\tau\tau_2} + \omega^2 + \right.$$

$$\left. + j\omega\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right)\right], \qquad (4.10)$$

cu caracteristica de amplitudine

$$A(\omega) =$$

$$= \frac{\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}\sqrt{\left(\frac{1}{\tau\tau_2} + \omega^2\right) + \omega^2\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_2}\right)^2}. \qquad (4.11)$$

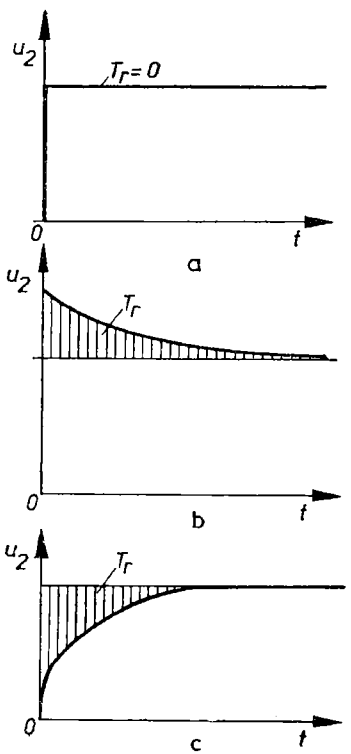


Fig. 4.5. Răspunsuri posibile ale divizorului mixt, serie, *RC*:

a — compensat; *b* — supracompensat; *c* — subcompensat.

Variantele caracteristicii în amplitudine a frecvenței sînt:

a) pentru $\tau = \tau_2$, $A(\omega) = 1 = \text{const}$ și deci amplitudinea tensiunii de ieșire nu este influențată de frecvența de excitație a divizorului;

b) pentru $\tau_2 \neq \tau$ există o dependență a amplitudinii semnalului față de frecvența de excitație a divizorului de tensiune.

Impedanța de sarcină. În vederea măsurării cu ajutorul unui osciloscraf, este necesar ca brațul de joasă tensiune să se închidă pe impedanța de intrare a unui amplificator. Această impedanță este cuprinsă între 1 MΩ și 10 MΩ. Schema electrică a dispozitivului de măsurare este dată în fig. 4.6. Proprietățile acestei scheme rezultă din analiza răspunsului la excitația cu treapta de tensiune și din caracteristica de frecvență.

Răspunsul la excitația treaptă de tensiune. Ecuațiile schemei, cu notațiile din fig. 4.6, sînt:

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int_0^t i_1\,\mathrm{d}t + R_3 i_3;$$

$$i_1 = i_2 + i_3; \qquad (4.12)$$

$$R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2\,\mathrm{d}t = R_3 i_3 = u_2.$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații diferențiale, pentru excitația treaptă de tensiune, adică $u_1 = U$, se obține

$$u_2 = \alpha U \mathrm{e}^{-\delta t}\left[\mathrm{ch}\,\omega_e t + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\omega_2 \tau_2} - \frac{\delta}{\omega_e}\right)\mathrm{sh}\,\omega_e t\right]. \qquad (4.13)$$

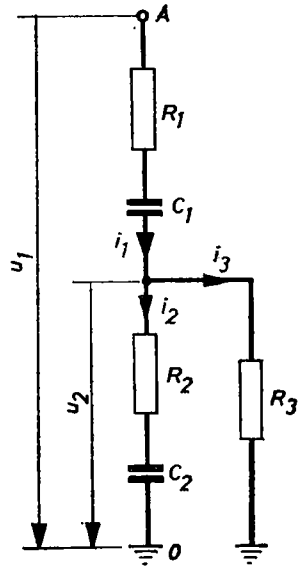


Fig. 4.6. Divizor de tensiune mixt, serie *RC*, cu impedanță de sarcină.

unde:

$$\alpha = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3};$$

$$\delta = \frac{C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_2 R_3 + C_1 R_3}{2 C_1 C_2 (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}; \qquad (4.14)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_1 C_2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}$$

În fig. 4.7 se prezintă răspunsul la excitația treaptă pentru schema din fig. 4.6, în care s-au considerat următoarele valori: $R_1 = 500\ \Omega$; $C_1 = 250$ pF; $R_2 = 0{,}125\ \Omega$; $C_2 = 1\ \mu$F; $R_3 = 1$ MΩ. Se

observă că datele au fost astfel alese încît $R_1C_1 = R_2C_2 = RC$, adică să se satisfacă condiția de compensare a schemei de bază. Timpul de răspuns corespunzător schemei din fig. 4.6 și deci și curbei din fig. 4.7 rezultă a fi infinit, ceea ce confirmă faptul că criteriul de

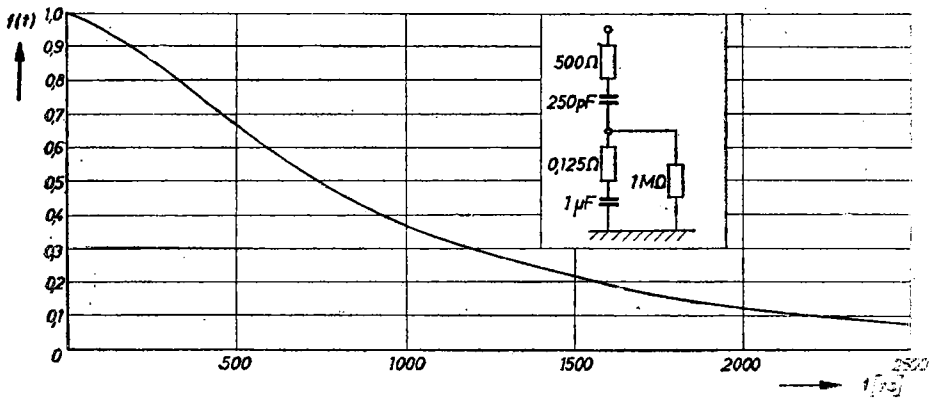


Fig. 4.7. Răspunsul indicial al divizorului din fig. 4.6.

calitate al unui sistem de măsurare nu poate fi luat timpul de răspuns, dacă răspunsul nu este de tip exponențial sau oscilant amortizat.

Caracteristica de frecvență. Pentru aprecierea calității sistemului de măsurare, corespunzător schemei din fig. 4.6, rămîne deci numai caracteristica de frecvență. Funcția de transfer corespunzătoare acestei scheme este

$$\mathcal{G}(p) = \frac{p^2 + p/\tau}{p^2 + 2p\delta + \omega_0^2}; \tag{4.15}$$

cu caracteristica de frecvență

$$G(j\omega) = \frac{\left(-\omega^2 + j\,\frac{\omega}{\tau}\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\omega\delta j} \tag{4.16}$$

și caracteristica de frecvență a amplitudinii

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2)\omega^2 + 2\omega^2\delta/\tau]^2 + [(\omega_0^2 - \omega^2)\omega/\tau + 2\omega^3\delta]^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}. \tag{4.17}$$

Examinarea relației (4.17) conduce la concluzia că acest tip de divizor nu este utilizabil pentru măsurarea tensiunii continue, pentru că în acest caz la $\omega=0$ și $A(0)=0$. Pentru frecvențe mai mari de 1 Hz, acest divizor este utilizabil, în ipoteza datelor indicate la §4.1.2, după cum se arată în fig. 4.8, în care s-a trasat caracteristica de frecvență a amplitudinii.

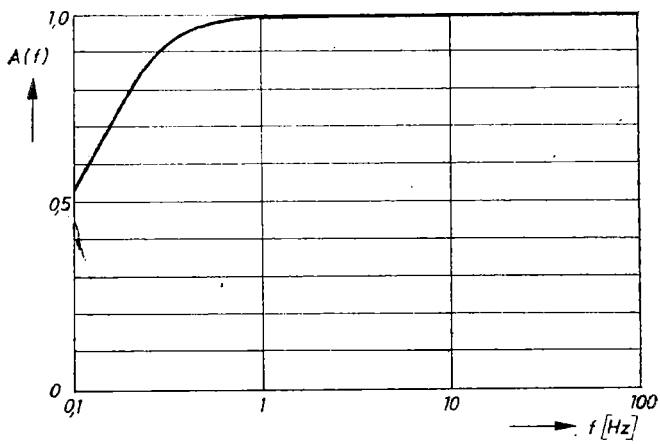


Fig. 4.8. Caracteristica de frecvență în amplitudine pentru divizorul din fig. 4.3.

Inductivitatea buclei de înaltă tensiune. Schemele prezentate în paragrafele precedente reprezintă situații extreme, puțin întîlnite în practică, dar utile pentru cercetarea proprietăților intrinseci.

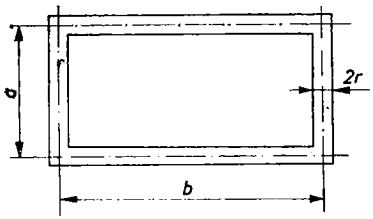
Dacă se consideră cazul concret al încercării unui întreruptor de înaltă tensiune, este clar că bucla, în care este introdus divizorul de tensiune și aparatul care se încearcă, prezintă o inductivitate apreciabilă. Pînă în prezent, nu este posibil a se executa montaje coaxiale pe partea de înaltă tensiune, pentru măsurarea tensiunii tranzitorii de restabilire. În bucla de joasă tensiune, legătura se execută cu cablul coaxial, ceea ce determină reducerea la minimum a inductivității în această buclă.

Aprecierea inductivității buclei dreptunghiulare de înaltă tensiune se face cu relația generală [43]

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + 2(M_{12} + M_{34}),$$

care explicitată, pe baza fig. 4.9, *a*, devine

$$L = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\left[\frac{\mu_r}{2} + 2\ln\frac{b}{r}\right] + \frac{\mu_0 b}{2\pi}\left[\frac{\mu_r}{2} + 2\ln\frac{a}{r}\right]. \qquad (4.18)$$



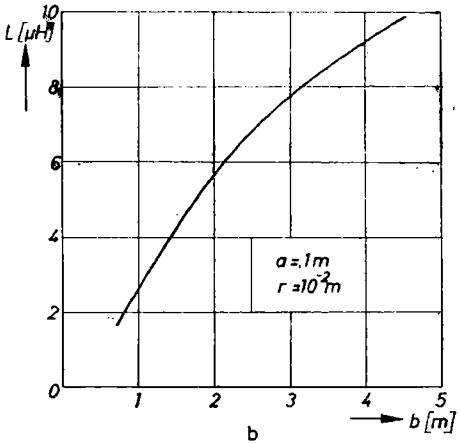


Fig. 4.9. Inductivitatea buclei de înaltă tensiune:

a — dimensiunile buclei; *b* — diagrama inductivității.

În fig. 4.9, *b* s-a trasat curba inductivității pentru o latură $a=1$ m, raza conductorului 0,01 m și latura *b* variabilă pînă la 4,5 m. Se poate constata că inductivitatea poate să ajungă la cel mult 10^{-5} H, valoare care a fost acceptată în calculele ce urmează.

În fig. 4.10, *a* se prezintă schema electrică a divizorului mixt serie *RC* completat cu inductivitatea *L* a buclei de înaltă tensiune. În ipoteza compensării schemei de bază $\tau = R_1C_1 = R_2C_2$, rezultă schema redusă din fig. 4.10, *b*, unde $R = R_1 + R_2$ și $C = C_1C_2/(C_1 + C_2)$. În aceste condiții, răspunsul la excitația treaptă ca și caracteristica de frecvență se vor determina pentru ansamblul serie *R*, *C*, *L*.

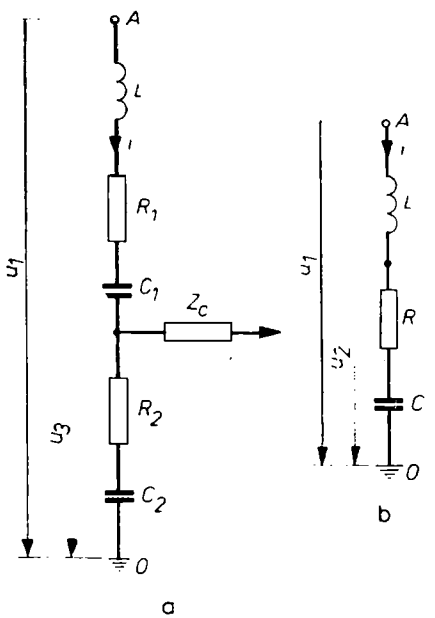


Fig. 4.10. Divizor de tensiune mixt serie R-C cu inductivitate:

a — schema generală; *b* — schema redusă.

Răspunsul de excitație treaptă. Circuitul din fig. 4.10, *b* este un circuit serie *R*, *L*, *C*, cu ecuațiile:

$$u_1 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t;$$
$$u_2 = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t. \qquad (4.19)$$

Pentru excitația treaptă, adică $u_1 = U$, rezultă răspunsul

$$u_2 = U\left[1 - e^{-\delta t}\left(\operatorname{ch}\omega_e t - \frac{\delta}{\omega_e}\operatorname{sh}\omega_e t\right)\right]. \tag{4.20}$$

În fig. 4.11 se prezintă răspunsul la excitația treaptă a divizorului, după relația (4.20) pentru care notațiile sînt:

$$\delta = R/2L; \quad \omega_e = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2};$$
$$\omega_0^2 = 1/LC \quad \text{și cu} \quad L = 10^{-5}\text{H}.$$

Pentru curba din fig. 4.11 se poate calcula timpul de răspuns, care rezultă a fi zero.

Caracteristica de frecvență. Funcția de transfer corespunzătoare schemei 4.10, *b* rezultă

$$G(p) = \frac{2p\delta + \omega_0^2}{p^2 + 2p\delta + \omega_0^2}, \tag{4.21}$$

iar caracteristica de frecvență este

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2\omega^2 - 2\delta\omega^3 j}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}. \tag{4.22}$$

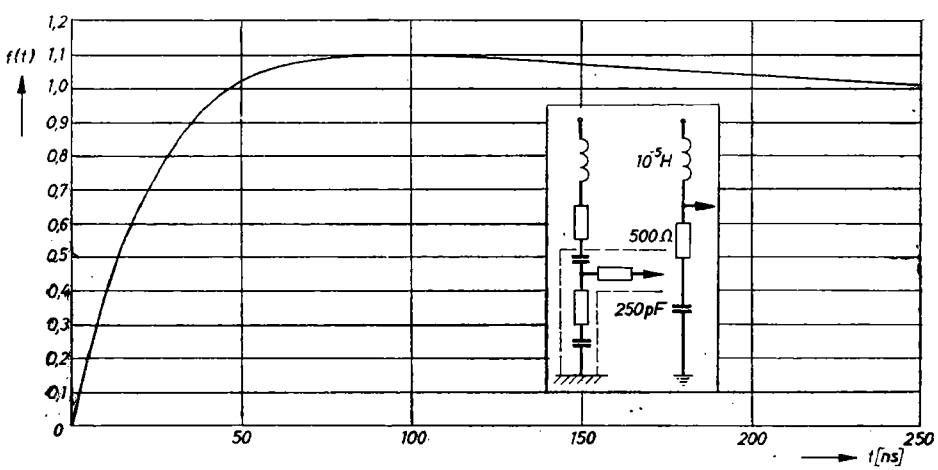


Fig. 4.11. Răspunsul indicial al divizorului din fig. 4.10.

cu caracteristica de frecvență a amplitudinii

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{[\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2\omega^2]^2 + 4\delta^2\omega^6}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2} \qquad (4.23)$$

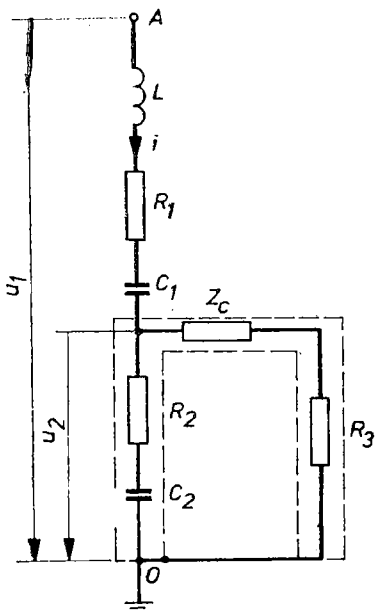


Fig. 4.12. Schema complexă a divizorului de tensiune mixt, serie, *RC*.

și cu reprezentarea grafică din fig. 4.13, cu $R_3 = \infty$. Se constată o comportare bună a divizorului pînă la frecvențe de 4 MHz, unde atenuarea este de 3 dB. Desigur că această apreciere este valabilă numai pentru compensarea intrinsecă a divizorului. În realitate mai trebuie ținut cont de procesul propagării în divizorul de tensiune și pe cablul coaxial de măsurare, ceea ce va conduce la o oarecare diminuare a benzii de frecvență. Mai trebuie observat că schema din fig. 4.10 este utilizabilă numai dacă tensiunea de măsurare, pe partea de joasă tensiune, se aplică direct la plăcile unui osciloscraf catodic, adică se exclude folosirea unui amplificator intermediar.

Schemă cu efect cumulat. Această schemă este indicată în cazul folosirii amplificatorului intermediar între divizorul de tensiune și osciloscraful catodic. În mod obligatoriu, circuitul de măsurare de joasă tensiune al divizorului se închide pe impedanța de intrare a amplificatorului, după cum se arată în schema electrică din fig. 4.12. Pentru această schemă, important este a se cunoaște funcția de transfer și caracteristica de frecvență. Funcția de transfer se stabilește observînd că același curent i parcurge ramura de înaltă tensiune, formată din inductivitatea L, rezistența R_1, capacitatea C_1 și ramura de joasă tensiune obținută prin conectarea în paralele rezistenței R_2, capacității C_2 cu rezistența R_3 a amplificatorului. Impedanța rezistivă $Z_c \ll R_3$, astfel că în calcule se va considera numai R_3 în loc de $Z_c + R_3$. Se obține astfel funcția de transfer

$$\mathcal{G}(p) = \frac{R_3(R_2 + 1/pC_2)}{(R_1 + pL + 1/pC_1)(R_2 + R_3 + 1/pC_2) + R_3(R_2 + 1/pC_2)}. \qquad (4.24)$$

Pentru valorile: $R_1=500\ \Omega$; $C_1=250$ pF; $R_2=0{,}125\ \Omega$; $C_2=1\mu F$; $L=10^{-5}$H; $R_3=1$ MΩ, se poate observa că $R_2 \ll R_3$; $R_1/C_2 \ll R_3/C_2$; $R_3/C_1 \gg R_3/C_2$; $R_2R_3 \ll R_1R_3$ și prin urmare, funcția de transfer se poate prezenta sub forma simplificată

$$\mathcal{G}(p) = \frac{C_1C_2R_2R_3p^2 + C_1R_3p}{LR_3C_1C_2p^3 + (C_1C_2R_1R_3 + C_1L)p^2 + R_3C_2p + 1}. \qquad (4.25)$$

Caracteristica de frecvență a amplitudinii, obținută pe baza funcției de transfer, este prezentată în fig. 4.13 cu $R_3=1$ MΩ. Se

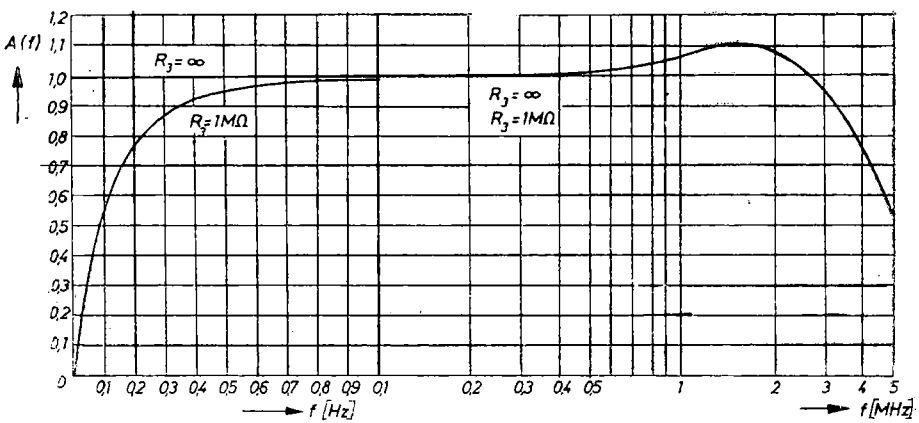


Fig. 4.13. Caracteristica de frecvență în amplitudine a divizorului din fig. 4.12.

constată că divizorul de tensiune se comportă bine în gama 0,15 Hz ... 4 MHz, cu atenuare de 3 dB.

4.1.3. *Divizorul mixt, paralel, RC*

Acest tip de divizor prezintă avantaje la măsurarea tensiunilor continui, în cazul în care sarcina are impedanță — rezistență — diferită de zero. Inconvenientul, la acest tip de divizor, este de natură constructivă și se referă la dimensionarea rezistențelor conectate în paralel cu condensatoarele divizorului, rezistențe care se dimensionează din punct de vedere termic, pentru funcționarea de lungă durată.

Schema de bază. Această schemă este prezentată în fig. 4.14. Tensiunea de măsurat u_1 se aplică bornei A față de masă și deci brațelor de înaltă și joasă tensiune conectate în serie. Tensiunea redusă u_2 se obține între borna a și masă, adică pe brațul de joasă tensiune. Ecuațiile de funcționare ale divizorului, în acord cu notațiile din fig. 4.14, sînt :

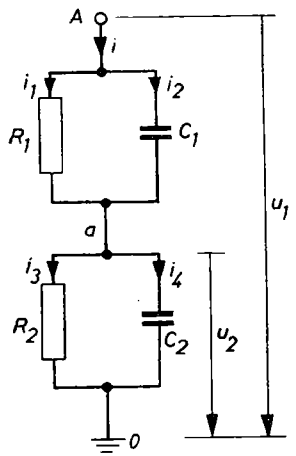


Fig. 4.14. Divizor de tensiune mixt, paralel, *RC*.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + R_2 i_3 = \frac{1}{C_1}\int_0^t i_2 \mathrm{d}t + \frac{1}{C_2}\int_0^t i_4 \mathrm{d}t ; \\ u_2 &= R_2 i_3 = \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2 \mathrm{d}t ; \\ R_1 i_1 &= \frac{1}{C_1}\int_0^t i_2 \mathrm{d}t ; \\ i_1 + i_2 &= i_3 + i_4 . \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Rezolvarea acestui sistem de ecuații pentru excitația treaptă de tensiune, adică pentru $u_1 = U$, conduce la răspunsul următor

$$u_2 = U\frac{C}{C_2}\left[\frac{\tau_2}{\tau} + \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right] \tag{4.27}$$

unde :

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} ; \quad R = R_1 + R_2 ; \\ \tau &= RC ; \quad \tau_1 = R_1 C_1 ; \quad \tau_2 = R_2 C_2 . \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

Ca și în cazul divizorului mixt, serie, *RC* și răspunsul divizorului mixt, paralel, *RC* poate lua trei forme caracteristice și anume :

a. Dacă este îndeplinită condiția $\tau_2 = \tau = \tau_1$, rezultă răspunsul

$$u_2 = U\frac{C}{C_2} = U\frac{R_2}{R}, \tag{4.29}$$

adică tensiunea u_2 este redusă în raportul C/C_2 fără a fi distorsionată; divizorul este compensat.

b. Dacă este îndeplinită condiția $\tau_2 > \tau$, rezultă că $\tau_2 > \tau_1$, adică constanta de timp a brațului de joasă tensiune este mai mare decît constanta de timp a brațului de înaltă tensiune, divizorul este subcompensat.

c. Dacă este îndeplinită condiția $\tau_2 < \tau$, rezultă $\tau_2 < \tau_1$, adică constanta de timp a brațului de joasă tensiune mai mică decît constanta de timp a brațului de înaltă tensiune; divizorul este supracompensat.

Schema cu efect cumulat. O asemenea schemă este prezentată în fig. 4.15, *a*, unde inductivitatea L este plasată în serie cu brațul de înaltă tensiune, iar rezistența de sarcină R_{2b} este conectată în paralel pe brațul de joasă tensiune; rezistența R_{2a} este proprie divizorului. Rezultă astfel rezistența în brațul de joasă tensiune

$$R_2 = \frac{R_{2a} R_{2b}}{R_{2a} + R_{2b}}. \qquad (4.30)$$

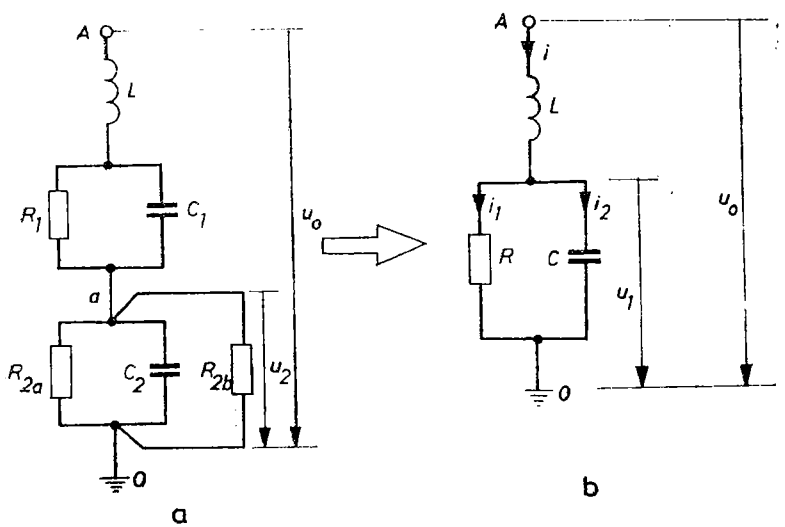


Fig. 4.15. Schema complexă a divizorului de tensiune mixt, paralel, *RC*: *a* — schema generală; *b* — schema redusă.

Interes prezintă divizorul compensat, adică pentru care $\tau_1 = \tau_2$; În această situație schema electrică din fig. 4.15, *a* se reduce la

schema electrică din fig. 4.15, *b*. Ecuațiile de funcționare ale acestei scheme, nu notațiile luate din schemă, sînt:

$$\begin{aligned} u_0 &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_1; \\ u_1 &= Ri_1 = \frac{1}{C}\int_0^t i_2\,\mathrm{d}t; \\ i &= i_1 + i_2; \\ i_1 &= \frac{u_1}{R}; \qquad i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Răspunsul la excitație treptată de tensiune, adică pentru $u_0 = U$ poate lua două variante și anume:

a. Răspuns oscilant amortizat, dacă $\omega_0^2 > \delta^2$

$$u_1 = U[1 - \mathrm{e}^t(\cos\omega_e t + - \sin\omega_e t)]; \quad \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \tag{4.32}$$

b. Răspuns aperiodic, dacă $\omega_0^2 < \delta^2$

$$u_1 = U\left[1 - \mathrm{e}^{-\delta t}\left(\mathrm{ch}\omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e}\mathrm{sh}\omega_e t\right)\right]; \quad \omega_e = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \tag{4.33}$$

unde: $\delta = 1/2\ RC$ și $\omega_0^2 = 1/LC$.

Deoarece divizorul este compensat, osciloscopul va măsura tensiunea brațului de joasă tensiune

$$u_2 = u_1 C/C_2, \tag{4.34}$$

cu valoarea u_1 dată de relațiile (4.32) și (4.33).

4.1.4. *Divizorul rezistiv*

Pentru măsurarea tensiunilor, în joasă și medie frecvență, cum este cazul tensiunilor de restabilire la aparatele de joasă tensiune, se pot utiliza divizoarele rezistive. Schema electrică a unui asemenea divizor este prezentată în fig. 4.16, în care R_1 este rezistența brațului de înaltă tensiune, iar R_2, format din conectarea în paralel a rezistenței R_{2a} a divizorului cu rezistențe R_{2b} a intrării în osci-

loscop, constituie brațul de tensiune redusă. Raportul de reducere k este raportul între tensiunile u_2 de ieșire și u_1 de intrare

$$k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{4.35}$$

După cum se prezintă schema electrică în fig. 4.16, adică fără considerarea inductivității proprii și a capacităților parazite, divizorul rezistiv prezintă o bună caracteristică de frecvență, dacă este realizat cu rezistențe cu inductivitate minimală.

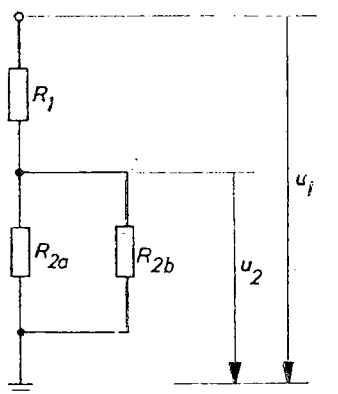


Fig. 4.16. Divizor de tensiune rezistiv.

Din punct de vedere tehnologic, divizorul rezistiv ridică numai problema stabilității termice; rezistențele trebuie dimensionate corespunzător regimului de lucru, după caz: impuls, sinusoidal permanent, curent continuu. Din punct de vedere fenomenologic, divizorul rezistiv nu poate fi utilizat în scheme în care divizorul modifică sensibil amortizarea fenomenului studiat. Un astfel de exemplu îl constituie schemele de încercare ale aparatelor electrice de comutație, în situațiile în care se urmărește tensiunea de ardere a arcului electric. Prezența divizorului cu rezistență redusă, conectat în paralel pe arcul electric, modifică condițiile de ardere și de stabilitate ale arcului electric.

4.2. Structura complexă a divizoarelor de tensiune

În cazul măsurării tensiunilor mai ridicate — spre exemplu peste 1 kV — caz în care cresc dimensiunile geometrice ale divizorului, este necesar a se ține seama de inductivitatea proprie a componentelor divizorului, ca și de prezența capacităților parazite. În asemenea situații, brațul de înaltă tensiune se realizează din multe elemente discrete, identice, conectate în serie, ceea ce permite a trata divizoarele ca o rețea continuă, în care are loc un proces de propagare al semnalului aplicat.

Tratarea analitică a procesului de propagare a semnalului în lungul divizorului este cu atît mai dificilă, cu cît structura divizorului este mai complexă.

4.2.1. *Divizorul mixt, serie RC*

Structura complexă a acestui divizor este arătată în fig. 4.17, în care s-au notat parametrii lineici după cum urmează:

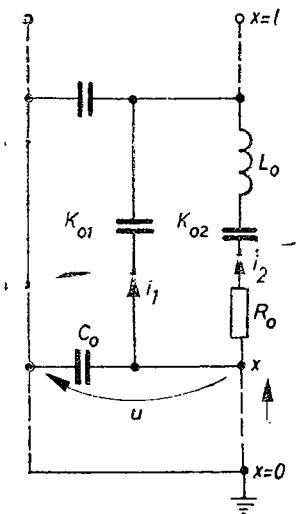


Fig. 4.17. Divizor de tensiune mixt, serie, *RC* cu schemă complexă.

K_{01}, capacitatea longitudinală, mărime parazitară;

K_{02}, capacitatea serie, mărime de construcție;

L_0, inductivitatea serie, mărime parazitară;

R_0, rezistența serie, mărime de construcție;

C_0, capacitatea transversală, mărime parazitară.

Lungimea divizorului este l; în punctul $x=0$ se conectează la pămînt, iar în punctul $x=l$ se aplică semnalul de măsurare.

Între mărimile lineice și cele totale există următoarele relații:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= K_{01}/l; \quad R = R_0 l; \quad L = L_0 l; \\ K_2 &= K_{02}/l; \quad C = C_0 l. \end{aligned}\right\} \quad (4.36)$$

Ecuațiile integro-diferențiale care caracterizează funcționarea divizorului, cu notațiile din fig. 4.17, sînt:

Pentru variația de tensiune produsă de trecerea curentului i_1 *prin capacitatea* K_{01}, pe lungimea $\mathrm{d}x$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\dfrac{K_{01}}{\mathrm{d}x}} \int_0^t i_1\,\mathrm{d}t. \quad (4.37)$$

Pentru variația de tensiune produsă de trecerea curentului i_2 *prin inductivitatea* L_0, capacitatea K_{02} și rezistența R_0 conectate în serie, pe lungimea $\mathrm{d}x$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x = L_0\,\mathrm{d}x\frac{\partial i_2}{\partial t} + \frac{1}{\dfrac{K_{20}}{\mathrm{d}x}} \int_0^t i_2\mathrm{d}t + R_0\,\mathrm{d}x i_2 \quad (4.38)$$

Pentru variația de curent pe lungimea dx

$$-\frac{\partial}{\partial x}(i_1 + i_2)dx = C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}; \tag{4.39}$$

O rezolvare analitică completă a relațiilor simultane (4.37), (4.38) și (4.39) nu este posibilă, dar în condițiile oferite de construcțiile practice care definesc locul x al prizei brațului de joasă tensiune în lungul divizorului și mărimile relative ale capacităților parazite, se poate găsi o rezolvare [69, 70]. Aceste condiții sînt următoarele:

$$\begin{aligned} &x/l \ll 1 \\ &C/(K_1 + K) \ll 1 \\ &K_1 \ll K_2. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Cu aceste precizări, răspunsul în tensiune la priza x de la extremitatea conectată la pământ, prin aplicarea treptei de tensiune U la extremitatea divizorului, este

$$u(t) = U\frac{x}{l}\left[1 - \frac{C}{6(K_1+K_2)} + 2e^{-\delta t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\mathrm{ch}\,\omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e}\mathrm{sh}\,\omega_e t\right)}{\left(1+\frac{K_1}{K_2}+\frac{C}{K_2 n^2\pi^2}\right)\left(\frac{C+K_1 n^2\pi^2}{C}\right)}\right]. \tag{4.41}$$

În relația (4.41), notațiile suplimentare sînt:

$$\delta = \frac{R}{2L}; \tag{4.42}$$

$$\omega_e = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \tag{4.43}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1 + \frac{K_1}{K_2} + \frac{C}{K_2 n^2\pi^2}}{\frac{LC}{n^2\pi^2}\left[1 + \frac{K_1 n^2\pi^2}{C}\right]}. \tag{4.44}$$

Demonstrația relației (4.41) este dată în anexa 11. În acord cu precizările făcute la § 2.1.3, în care se justifică necesitatea obținerii unui răspuns amortizat, condiția de neoscilare a dispozitivului este ca $\delta^2 > \omega_0^2$, adică

$$R > 2n\pi \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \frac{1 + K_1/K_2 + C/K_2 n^2\pi^2}{1 + K_1 n^2\pi^2/C}}. \qquad (4.45)$$

Dacă această condiție este îndeplinită pentru $n=1$, ea va fi îndeplinită pentru orice alte valori pozitive și întregi ale lui n. Pentru $n=1$ rezultă

$$R > 2\pi \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{\frac{1 + K_1/K_2 + C/K_2\pi^2}{1 + K_1\pi^2/C}}. \qquad (4.46)$$

Pentru $K_1 \ll K_2$ și $C/K_2\pi^2 \ll 1$, ceea ce are loc la construcțiile uzuale de divizoare, condiția (4.46) se reduce la

$$R > 2\pi \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + K_1\pi^2/C}}. \qquad (4.47)$$

Din relația (4.47) rezultă că pentru un divizor de tensiune mixt, serie, RC, inductivitatea totală L a divizorului joacă un rol decisiv în obținerea unui răspuns neoscilant. Valorile practice ale inductivității lineice sînt de ordinul $L_0 \approx 1\,\mu H/m$ pentru un conductor drept. Ca urmare, valori mai mici decît aceasta nu pot fi luate în considerare.

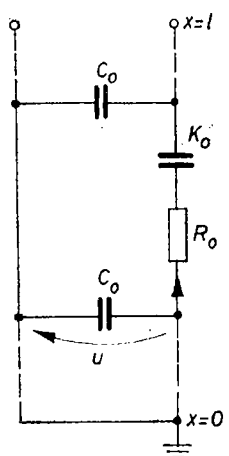


Fig. 4.18. Divizor de tensiune mixt, serie RC, cu schemă simplificată.

4.2.2. *Divizorul mixt, serie RC, simplificat*

La performanțe mai modeste, spre exemplu pentru o bandă de frecvență sub 0,5 MHz, se poate neglija în calculație inductivitatea L_0 a divizorului ca și capacitatea longitudinală parazitară K_{01}. În aceste condiții schema electrică a divizorului se simplifică ca în fig. 4.18. Parametrii lineici de construcție sînt capacitatea serie K_0 și rezistența serie R_0, iar ca parametru lineic parazitar rămîne capacitatea

transversală C_0. Între mărimile lineice și cele totale sînt valabile relațiile:

$$K = K_0/l;$$
$$R = R_0 l; \qquad (4.48)$$
$$C = C_0 l.$$

Ecuațiile de funcționare ale schemei din fig. 4.18 sînt următoarele:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{K_0}{\mathrm{d}x}}\int_0^t i\,\mathrm{d}t + R_0\,\mathrm{d}x i; \qquad (4.49)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x}\,\mathrm{d}x = C_0\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (4.50)$$

La aplicarea excitației treaptă de tensiune $u = U_1$ la extremitatea neconectată la pămînt a divizorului se obține răspunsul în tensiune la priza $x \ll l$ a divizorului

$$u(t) = U\frac{x}{l}\left[1 - \frac{C}{6K} + 2\sum \frac{(-1)^n n^2\pi^2 \exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 K + C}{CKR}\,t\right)}{(n^2\pi^2 K + C)/K}\right]. \qquad (4.51)$$

Demonstrația relației (4.51) este dată în anexa 12.

4.2.3. *Divizorul rezistiv*

Structura divizorului rezistiv complex se obține din schema din fig. 4.17 a divizorului capacitiv, serie, RC, în care capacitatea K_2 ia valoare infinit de mare. Se obține astfel schema din fig. 4.19.

Răspunsul la excitație treaptă de tensiune $u = U$ se obține din relațiile (4.41), (4.42) și (4.43) în care $K_2 \to \infty$. Rezultă astfel

$$u(t) = U\frac{x}{l}\left[1 + \right.$$
$$\left. + 2\mathrm{e}^{-\delta t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\mathrm{ch}\,\omega_e t + \dfrac{\delta}{\omega_e}\,\mathrm{sh}\,\omega_e t\right)}{1 + K_1 n^2\pi^2/C}\right], \qquad (4.52)$$

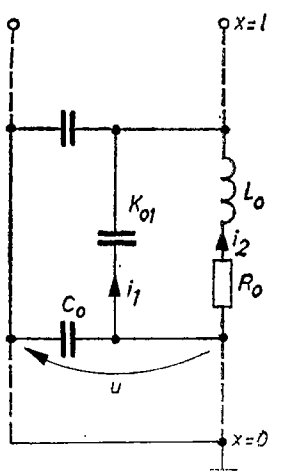


Fig. 4.19. Divizor de tensiune rezistiv, cu schemă complexă.

unde :

$$\delta = R/2L;$$

$$\omega_0^2 = \frac{n^2\pi^2}{L(C + K_1 n^2\pi^2)}; \tag{4.53}$$

$$\omega_e = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Pentru ca răspunsul divizorului la excitația treaptă să nu fie oscilant, este necesar ca $\delta^2 > \omega_0^2$, adică

$$R > 2\pi \sqrt{\frac{Ln^2}{C + K_1 n^2\pi^2}}.$$

Pentru $n=1$, rezultă condiția de neoscilație a divizorului

$$R > 2\pi \sqrt{\frac{L}{C + K_1\pi^2}}. \tag{4.54}$$

Dacă această condiție (4.54) este îndeplinită cu atît mai mult va fi îndeplinită pentru $n>1$.

4.2.4. *Divizorul rezistiv simplificat*

La realizarea rezistenței divizorului cu inductivitate redusă și la acceptarea unei performanțe mai modeste — spre exemplu o bandă de frecvență sub 1 MHz — calcularea divizorului se poate realiza pe baza structurii din fig. 4.20, unde s-a neglijat inductivitatea intrinsecă. Răspunsul în tensiune al acestui divizor este dat [30] de relația

$$u(t) = U\frac{x}{l}\left[1 + 2\sum \frac{(-1)^n \exp\left[-\dfrac{n^2\pi^2 t}{R(C + K_1 n^2\pi^2)}\right]}{1 + n^2\pi^2 K_1/C}\right]. \tag{4.55}$$

Expresia (4.55) se deduce utilizînd metoda de calcul prezentată în anexa 11.

Cum pentru divizoare construite $K_1 \ll C_1$, schema structurală se prezintă ca în fig. 4.21, iar răspunsul la excitația treaptă de tensiune U este

$$u(t) = U \left[1 + 2 \sum (-1)^n \exp\left(\frac{n^2 \pi^2 t}{RC} \right) \right]. \qquad (4.56)$$

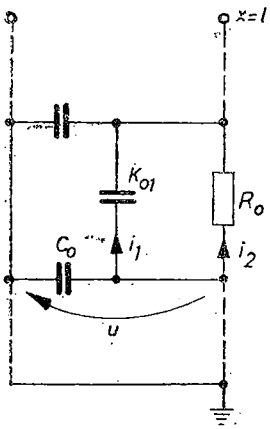


Fig. 4.20. Divizor de tensiune rezistiv, cu schemă simplificată.

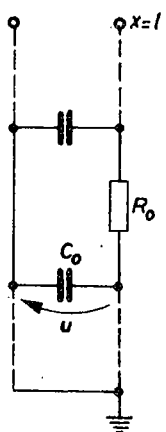


Fig. 4.21. Divizor de tensiune rezistiv, schemă simplificată la extrem.

Timpul de răspuns corespunzător divizorului de tensiune astfel simplificat, cu notația $T_n = RC/n^2\pi^2$, rezultă

$$T_r = \int_0^\infty \left[1 - \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{t}{T_n}} \right) \right] dt = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n T_n = \qquad (4.57)$$

$$= \frac{2RC}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{RC}{6}. \qquad (4.58)$$

În demonstrația relației (4.58) s-au utilizat rezultatele obținute în § 3.2.1. La aprecierea calității unui divizor rezistiv este decisiv produsul RC; cum capacitatea parazită C nu poate fi diminuată, rezultă că este de dorit ca rezistența R să fie cît mai mică. Limite pentru diminuarea rezistenței sînt impuse de condiția de a nu aduce răspunsul în domeniul oscilant. De aceea, în mod practic, în cazul

măsurării tensiunilor înalte, valorile potrivite pentru rezistența R variază în jurul valorii 10 kΩ.

O răspîndire largă, la măsurarea tensiunilor înalte, o are divizorul rezistiv cu ecran, la care, prin prezența ecranului, se determină creșterea capacității longitudinale K_1, astfel încît influența capacității transversale C_0 devine nesemnificativă. Prin această construcție se urmărește și linearizarea divizorului, în ce privește intensitatea cîmpului electric în lungul coloanei.

4.2.5. *Divizorul universal*

Un divizor, cu structură complexă, capabil să aibă performanțe bune la măsurarea tensiunilor de impuls, de curent alternativ și de curent continuu, este divizorul universal [23] schițat în fig. 4.22 și care are următorii parametrii lineici:

C_0 este capacitatea transversală, mărime parazitară;

R_{01} — rezistența longitudinală, paralelă, mărime de construcție;

R_{02} — rezistența serie, mărime de construcție;

K_{02} — capacitatea serie, mărime de construcție.

Prezența rezistenței lineice longitudinale R_{01} este de natură a îmbunătăți performanțele divizorului la măsurarea tensiunilor continui cu ajutorul oscilografelor cu impedanță de intrare finită, de exemplu 1 MΩ. În adevăr, în cazul unui divizor capacitiv, această impedanță cumulată în paralel pe brațul de joasă tensiune face imposibilă utilizarea divizorului la frecvența zero, după cum s-a notat la paragraful 4.1.2. În același timp, prezența rezistențelor longitudinale ridică probleme de dimensionare la încălzirea acestora; o valoare cît mai ridicată a rezistențelor este de recomandat, din acest punct de vedere, dar în acest caz eficiența la măsurarea semnalelor de frecvență mică este mai limitată.

Între mărimile lineice și cele totale, ținînd seama de lungimea l a divizorului, există relațiile:

$$\begin{aligned} C &= C_0 l; \\ R_1 &= R_{01} l; \\ R_2 &= R_{02} l; \\ K_2 &= K_{02}/l. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Performanțele divizorului se stabilesc pe baza ecuațiilor integro-diferențiale, în acord cu fig. 4.22,

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x = R_{01}\,\mathrm{d}x i_1\,; \tag{4.60}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{K_{02}\,\mathrm{d}x}\int_0^t i_2\,\mathrm{d}t + R_{02}\,\mathrm{d}x i_2\,; \tag{4.61}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(i_1 + i_2)\mathrm{d}x = C_0\,\mathrm{d}x\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4.62}$$

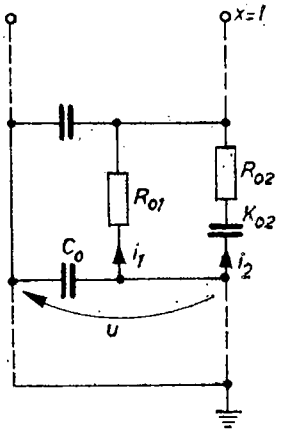


Fig. 4.22. Divizor de tensiune universal.

Aceste ecuații, la aplicarea excitației treaptă de tensiune $u = U$, conduc la răspunsul, pe partea de joasă tensiune, a divizorului

$$u(t) = U\frac{x}{l}\left[1 + \frac{2R_1K_2}{R_2C}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\pi^2n^2\mathrm{e}^{-at}\left(\mathrm{ch}\,bt + \frac{b}{a}\,\mathrm{sh}\,bt\right)\right], \tag{4.63}$$

unde :

$$a = \frac{n^2\pi^2}{2R_2C}\,; \quad b = \sqrt{\left(\frac{n^2\pi^2}{2R_2C}\right)^2 - \frac{n^2\pi^2}{R_1R_2CK_2}} \tag{4.64}$$

și cu demonstrația din anexa 13. Relația finală (4.63) este valabilă pentru $R_1 \gg R_2$ și $K_2 > C$, condiții îndeplinite la divizoare construite.

Dacă $R_1 \to \infty$, din relația (4.63) rezultă

$$u(t) = U\frac{x}{l}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{R_2C}\,t\right)\right], \tag{4.65}$$

adică relația (4.51) a divizorului mixt, serie RC cu structură simplificată, la care se consideră că $n^2\pi^2K \gg C$, cu demonstrația din anexa 13.

La un divizor de tensiune de tip universal, structura de bază rămîne aceea a divizorului mixt, serie, RC, avînd în vedere că re-

zistența longitudinală R_l (100 ... 1 000 MΩ) este cu mult mai mare decît rezistența serie R_1 (400 ... 600 Ω). La execuția divizorului, este necesar a ecrana rezistența longitudinală [23] în vederea asi-

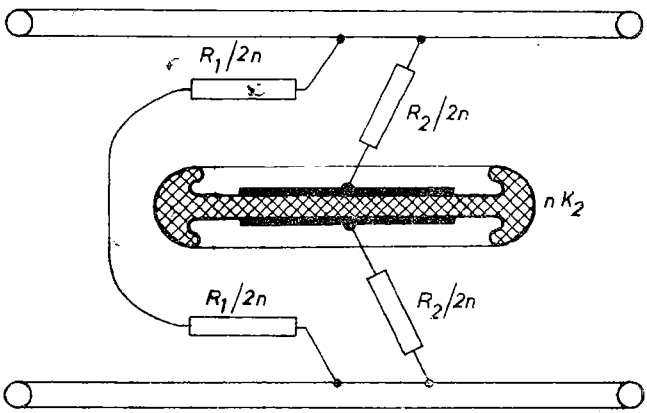


Fig. 4.23. Element din divizorul de tensiune universal.

gurării unui cîmp electric constant, în lungul rezistenței. La un divizor cu n elemente componente, structura unei componente arată ca în fig. 4.23.

4.3. Divizorul de tensiune în lanțul de măsurare

În fig. 4.1 s-a prezentat schema de măsurare în care se folosește divizorul de tensiune drept convertor de tensiune, iar în subcapitolele 4.1 și 4.2 s-au prezentat performanțele divizoarelor de tensiune extrase din schema de măsurare. În aceste capitole s-a făcut abstracție de multe aspecte constructive de natură să afecteze performanțele teoretice ale divizoarelor de tensiune. În cele ce urmează se prezintă acele fenomene și aspecte ce interferează rezultatele de calcul obținute prin considerarea divizorului extras din schema de măsurare, după cum urmează:

a. *Divizorul de tensiune este construit din elemente discrete.* Cu cît numărul acestor elemente este mai mare cu atît structura divizorului se apropie mai mult de o structură continuă.

Dacă N este numărul de elemente identice în brațul de înaltă tensiune și n — în brațul de joasă tensiune, raportul x/l, în rela-

țiile din capitolul 4, care reprezintă răspunsul la excitație treaptă, poate fi înlocuit cu raportul n/N. Brațul de joasă tensiune este de cele mai multe ori constituit dintr-un singur element și are o construcție diferită de construcția elementelor din brațul de înaltă tensiune. Extinderea longitudinală a brațului de joasă tensiune este relativ mai mare decît ar corespunde rețelei electrice cuprinse în acest braț.

b. *Capacitatea divizorului față de pămînt nu este uniform repartizată* deoarece, din motive de izolație, divizoarele se extind după o direcție perpendiculară pe planul solului. Ca urmare, elementele componente mai apropiate de pămînt au o capacitate față de pămînt mai mare decît elementele mai depărtate. Folosirea ecranelor este de natură să reducă la minimum influența capacităților parazitare față de pămînt.

c. *Divizorul de tensiune face parte dintr-un lanț de măsurare*, din care în mod obligatoriu mai fac parte: rezistența de amortizare și linia de racord plasată între obiectul care se încearcă și divizor, ca și un cablu coaxial de racord între divizor și oscilograful catodic, după cum este arătat în fig. 4.1. Dacă obiectul care se încearcă este străpuns sau conturnat, în bucla de înaltă tensiune apar tensiuni induse, care distorsionează rezultatele măsurării.

d. *Efectul pelicular*, mai ales la măsurarea tensiunilor de impuls, este de natură să distorsioneze rezultatele, în măsura în care în construcția divizorului se utilizează secțiuni mici de conductor și ecrane necorespunzătoare.

e. *În calculele precedente s-a considerat că brațul de joasă tensiune este fără sarcină*, în multe montaje concrete acest lanț se închide pe o impedanță, în mod curent impedanța caracteristică a cablului de măsurare.

În fig. 4.24 se prezintă lanțul de măsurare limitat la trei componente: Impedanța de amortizare Z_a, linia de racord și divizorul de tensiune. Impedanța de amortizare Z_a, de natura unei rezistențe pure (cu o inductivitate intrinsecă minimală), are rolul funcțional de a amortiza undele reflectate care se formează la trecerea de la linia de racord la divizorul de tensiune. În adevăr, linia de racord, în mod normal, nu se închide prin impedanța sa caracteristică, întrucît impedanța divizorului nu este egală cu impedanța caracteristică a liniei de racord. Impedanța de amortizare, cu o rezistență de 300 ... 500 Ω se plasează la extremitatea liniei spre obiectul care se încearcă.

Linia de racord este caracterizată prin impedanța caracteristică $Z_c = \sqrt{L_0/C_0}$ și prin timpul mort $\tau = l\sqrt{L_0/C_0}$, adică timpul necesar

parcurgerii liniei de lungime l, L_0 și C_0 fiind inductivitatea lineică, respectiv capacitatea lineică.

Divizorul de tensiune este reprezentat printr-un cuadripol în gol cu impedanța de intrare Z_d, deoarece, pe de o parte sarcina

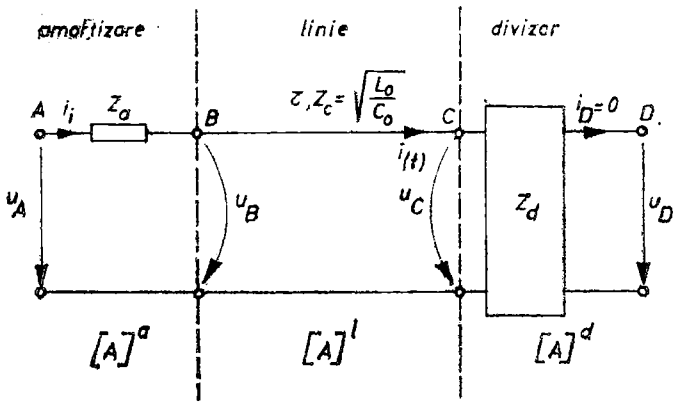


Fig. 4.24. Poziția divizorului de tensiune în lanțul de măsurare.

de ieșire nu determină o reacție asupra brațului de înaltă tensiune, iar pe de altă parte, impedanța de sarcină (cablul coaxial și impedanța terminală) poate fi inclusă, din punct de vedere al calculului, în structura brațului de joasă tensiune [69, 70].

4.3.1. *Unda reflectată*

După cum s-a arătat, lanțul de măsurare nu are o structură omogenă, astfel că este necesar a se calcula unda reflectată la trecerea de la linia de racord la divizorul de tensiune. Pentru a calcula unda reflectată, se consideră linia de racord ca o linie fără pierderi (rezistența nulă, perditanța nulă) cu impedanța caracteristică Z_c și că această linie se închide printr-o impedanță complexă $\underline{Z}_d$. În anexa 14 se demonstrează că, unda reflectată are expresia în tensiune

$$\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_d \left(\frac{\underline{Z}_d - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_c} \right) = k_c \mathcal{U}_d, \tag{4.66}$$

unde $\mathcal{Z}_d$ este expresia impedanței operaționale corespunzătoare impedanței $\underline{Z}_d$ a divizorului de tensiune, iar k_c este factorul de reflexie în imagine

$$k_c = \frac{\mathcal{Z}_d - \mathcal{Z}_c}{\mathcal{Z}_d + \mathcal{Z}_c}. \tag{4.67}$$

4.3.2. *Răspunsul indicial al lanțului de măsurare*

Pentru a calcula timpul de răspuns al ansamblului reprezentat schematic în fig. 4.24, ansamblu format din impedanța (rezistența) de amortizare Z_a, linia de racord cu impedanța caracteristică Z_c și divizorul de tensiune cu impedanța de intrare Z_d, este necesar a se cunoaște, în prealabil, răspunsul indicial al acestui ansamblu [8, 51, 71].

În acest scop, se folosește metoda undelor mobile și expresiile (4.66) și 4.67) ce caracterizează procesul de reflexie la schimbarea structurii unui sistem de transmisie electrică.

Înainte de producerea reflexiei în punctul C, pe durata propagării undei pe linia de racord, tensiunea în punctul B este

$$\mathcal{U}_B = \mathcal{U}_A \frac{\mathcal{Z}_c}{\mathcal{Z}_a + \mathcal{Z}_c} = \mathcal{U}_d. \tag{4.68}$$

La prima reflexie în punctul C, tensiunea corespunzătoare rezultă

$$\mathcal{U}_c = \mathcal{U}_d + \mathcal{U}_r = \mathcal{U}_d + \mathcal{U}_d k_c. \tag{4.69}$$

Sau, dacă se ține seama de relația (4.68), se obține

$$\mathcal{U}_C = \mathcal{U}_A \frac{\mathcal{Z}_c}{\mathcal{Z}_a + \mathcal{Z}_c} (1 + k_C). \tag{4.70}$$

Unda reflectată în punctul C se propagă pe linia de racord spre punctul B, unde se reflectă din nou cu coeficientul $K_B(p)$. Această undă, reflectată în punctul B, ajunge din nou în punctul C după un timp egal cu de două ori durata de propagare τ a liniei

$$t = 2\tau = 2l/v, \tag{4.71}$$

scurs între momentele primei și celei de a doua reflexii în punctul C. În relația (4.71), l este lungimea liniei de racord, iar v este viteza

de propagare pe această linie. În continuare, fenomenele de reflexie din punctele C și B se succed, astfel că în punctul C, la intrarea în divizorul de tensiune, vor apărea, pe lîngă unda directă, numeroase unde reflectate.

Dacă se ia ca origină a timpului momentul în care unda directă a ajuns în punctul C, la divizor, tensiunea de intrare în divizor se scrie sub forma

$$\mathcal{U}_C = \mathcal{U}_A\left(\frac{\mathfrak{Z}_c}{\mathfrak{Z}_a+\mathfrak{Z}_c}\right)(1+k_C) + e^{-\frac{2l}{v}p}\mathcal{U}_A\left(\frac{\mathfrak{Z}_c}{\mathfrak{Z}_c+\mathfrak{Z}_a}\right)(1+k_C)k_B\cdot k_C +$$

$$+ e^{-\frac{4l}{v}p}\mathcal{U}_A\left(\frac{\mathfrak{Z}_c}{\mathfrak{Z}_c+\mathfrak{Z}_a}\right)(1+k_C)k_B^2k_C^2 + \ldots =$$

$$= \mathcal{U}_A\left(\frac{\mathfrak{Z}_c}{\mathfrak{Z}_c+\mathfrak{Z}_a}\right)(1+k_C)\times(1+e^{-\frac{2l}{v}p}k_Bk_C + e^{-\frac{4l}{v}p}k_B^2k_C^2 + \ldots). \quad (4.72)$$

Seria infinită din expresia (4.72) este convergentă, astfel că relația (4.72) se poate scrie mai concentrat astfel

$$\mathcal{U}_C = \mathcal{U}_A\left(\frac{\mathfrak{Z}_c}{\mathfrak{Z}_c+\mathfrak{Z}_a}\right)(1+k_C)\frac{1}{1-e^{-\frac{2l}{v}p}\cdot k_Ck_B}. \quad (4.73)$$

Se poate lua ca origină a timpului momentul plecării undei directe din punctul B. În acest caz, în original, rezultă o întîrziere $\tau=l/v$, iar în imagine tensiunea $\mathcal{U}_c$ la intrarea în divizor se scrie

$$\mathcal{U}_C = \mathcal{U}_A\left(\frac{\mathfrak{Z}_c}{\mathfrak{Z}_c+\mathfrak{Z}_a}\right)(1+k_C)\frac{e^{-\tau p}}{1-e^{-2\tau p}\cdot k_Ck_B}. \quad (4.74)$$

Expresia (4.74) reprezintă, în imagine, excitația divizorului de tensiune. Răspunsul $\mathcal{U}_D$, la această excitație, se formulează cu relația

$$\mathcal{U}_D = \mathcal{U}_C\cdot\mathcal{H}_d(p), \quad (4.75)$$

unde $\mathcal{H}_d(p)$ este funcția de transfer a divizorului de tensiune.

Funcția de transfer a întregului lanț de măsurare este definită de relația

$$\mathcal{H}(p) = \frac{\mathfrak{U}_D}{\mathfrak{U}_A} = e^{-\tau p}\left(\frac{\mathfrak{Z}_c}{\mathfrak{Z}_c + \mathfrak{Z}_a}\right)(1 + k_C)\,\frac{\mathcal{H}_d(p)}{1 - e^{-2\tau p} k_C k_B}. \qquad (4.76)$$

Funcția de transfer $\mathcal{H}_d(p)$ a divizorului de tensiune se calculează din relația matriceală

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{U}_C \\ \mathfrak{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^d & A_{12}^d \\ A_{21}^d & A_{22}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{U}_D \\ \mathfrak{I}_D \end{bmatrix}, \qquad (4.77)$$

în care $\mathfrak{I}_D = 0$, deoarece, $i_D = 0$, adică divizorul de tensiune se consideră neîncărcat. În această circumstanță $\mathfrak{U}_C = A_{11}^d \mathfrak{U}_D$ și deci

$$\mathcal{H}_d(p) = \frac{\mathfrak{U}_D}{\mathfrak{U}_C} = \frac{1}{A_{11}^d}. \qquad (4.78)$$

Funcția de transfer normată [1] a lanțului de măsurare este

$$\mathcal{G}(p) = \frac{\mathcal{H}(p)}{\mathcal{H}(0)}$$

sau

$$\mathcal{G}(p) = e^{-\tau p}\frac{\mathfrak{Z}_c + \mathfrak{Z}_a(0)}{\mathfrak{Z}_c + \mathfrak{Z}_a(p)} \cdot \frac{1 + k_C(p)}{1 + k_C(0)} \cdot \frac{1 - k_C(0)k_D(0)}{1 - e^{-2\tau p}k_C(p)k_B(p)} \cdot \frac{A_{11}^d(0)}{A_{11}^d(p)}. \qquad (4.79)$$

Printr-o serie de transformări relația (4.79) devine

$$\mathcal{G}(p) = e^{-\tau p}\frac{1 + \dfrac{\mathfrak{Z}_a(0)}{\mathfrak{Z}_d(0)}}{1 + \dfrac{\mathfrak{Z}_a(p)}{\mathfrak{Z}_d(p)}} \cdot \frac{1 - k_C(p)\,k_B(p)}{1 - e^{-2\tau p}k_C(p) \cdot k_B(p)} \cdot \frac{A_{11}^d(0)}{A_{11}^d(p)}. \qquad (4.80)$$

Răspunsul indicial se obține cu relația

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\,\mathcal{G}(p)\right]. \qquad (4.81)$$

---

[1] În condițiile expuse în cap. 2.

4.3.3. *Timpul de răspuns*

Avînd la dispoziție, fie funcția de transfer normată, fie răspunsul indicial, timpul de răspuns se poate calcula cu ajutorul uneia din cele două metode, expuse în cap. 2, adică

a. Cu ajutorul expresiei răspunsului indicial

$$T_r = \int_0^\infty [1 - f(t)]\,\mathrm{d}t; \tag{4.82 a}$$

b. Cu ajutorul expresiei funcției de transfer normate

$$T_r = -\mathcal{G}'(0). \tag{4.82 b}$$

Este convenabil a se calcula timpul de răspuns cu relația (4.82 b), care folosește expresia funcției de transfer normate, deoarece în acest mod se evită găsirea răspunsului indicial. În acest scop se observă că relația (4.79) se poate scrie sub forma

$$\mathcal{G}(\mathrm{p}) = vwxyz, \tag{4.83}$$

unde:

$$v = \mathrm{e}^{-\tau \mathrm{p}}; \tag{4.84}$$

$$w = \frac{\mathfrak{S}_c + \mathfrak{S}_a(0)}{\mathfrak{S}_c + \mathfrak{S}_a(\mathrm{p})}; \tag{4.85}$$

$$x = \frac{1 + k_C(\mathrm{p})}{1 + k_C(0)}; \tag{4.86}$$

$$y = \frac{1 - k_C(0)\,k_B(0)}{1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{p}}\,k_C(\mathrm{p})\,k_B(\mathrm{p})}; \tag{4.87}$$

$$z = \frac{A_{11}^d(0)}{A_{11}^d(\mathrm{p})}. \tag{4.88}$$

Cu aceste notații timpul de răspuns rezultă

$$T_r = -\mathcal{G}'(0) = -\lim_{\mathrm{p}\to 0}\left[vwxy\left(\frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} + \frac{z'}{z}\right)\right]. \tag{4.89}$$

Se observă că

$$v(0) = 1\,;\ w(0) = 1\,;\ x(0) = 1\,;\ y(0) = 1\,;\ z(0) = 1,$$

astfel că expresia timpului de răspuns se reduce la

$$T_r = -\lim_{p\to 0}\,(v' + w' + x' + y' + z'). \tag{4.90}$$

După efectuarea calculelor se obține

$$T_r = T_d + \tau\left[\frac{\dfrac{\mathfrak{B}_d(0)\,\mathfrak{B}_a(0)}{\mathfrak{B}_c} + \mathfrak{B}_c}{\mathfrak{B}_d(0) + \mathfrak{B}_a(0)} - 1\right] +$$

$$+ \frac{\mathfrak{B}_a(0)}{\mathfrak{B}_c}\left[T_{KC}\,\frac{\mathfrak{B}_a(0) + \mathfrak{B}_c}{\mathfrak{B}_d(0) + \mathfrak{B}_a(0)} - T_{KB}\,\frac{\mathfrak{B}_a(0) + \mathfrak{B}_c}{\mathfrak{B}_\partial(0) + \mathfrak{B}_a(0)}\right], \tag{4.91}$$

cu următoarele notații :

a) Timpul de răspuns al divizorului

$$T_d = -\mathcal{G}'(0) = -\lim_{p\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{\mathcal{K}_d(b)}{\mathcal{K}_d(0)}\right] = -\lim_{p\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{A^d_{11}(0)}{A^d_{11}(p)}\right] = \frac{A'^d_{11}(0)}{A^d_{11}(0)}. \tag{4.92}$$

b) Timpul de răspuns corespunzător reflexiei la intrarea în divizor

$$T_{KC} = -\lim_{p\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{[1 + k_C(p)]}{1 + k_C(0)}\right] = -\frac{k'_C(0)}{1 + k_C(0)}. \tag{4.93}$$

c) Timpul de răspuns corespunzător reflexiei la amortizare

$$T_{KB} = -\lim_{p\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{1 + k_B(p)}{1 + k_B(0)}\right] = -\frac{k'_B(0)}{1 + k_B(0)}. \tag{4.94}$$

4.3.4. *Un model de calcul pentru timpul de răspuns*

Calculul timpului de răspuns cu ajutorul relației (4.91) este accesibil dacă se poate stabili o schemă echivalentă a divizorului de tensiune. Un asemenea caz îl prezintă divizorul rezistiv. Schema echivalentă a acestui divizor este prezentată în fig. 4.25.

Echivalența se referă la faptul că timpul de răspuns al schemei din fig. 4.25 este identic cu timpul de răspuns dat de relația (4.58) al divizorului rezistiv.

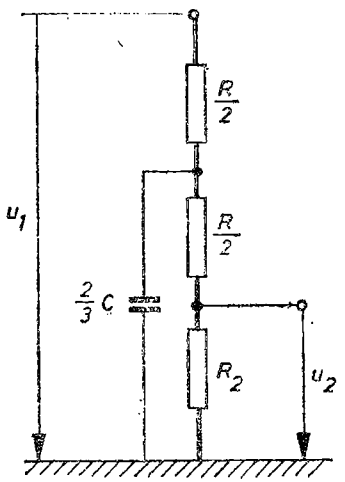


Fig. 4.25. Schema echivalentă a divizorului de tensiune rezistiv.

Lanțul de măsurare este astfel desenat în fig. 4.26, în care față de fig. 4.24 s-au făcut următoarele completări:

a) impedanța de amortizare Z_a este reprezentată prin rezistența R_a și inductivitatea L_a;

b) în punctul C s-a introdus capacitatea C_e a unui ecran, cu care divizorul rezistiv este echipat, în vederea uniformizării cîmpului electric în lungul divizorului;

c) divizorul de tensiune este reprezentat în schema echivalentă prin cuadripolul cuprins între punctele C și D, care conține atît schema echivalentă din fig. 4.25, cît și capacitatea C_e a ecranului. În raționamentele ce urmează se consideră că rezistența R a divizorului de tensiune este sensibil mai mare decît rezistența R_2 la bornele căreia se captează semnalul util, adică $R \gg R_2$.

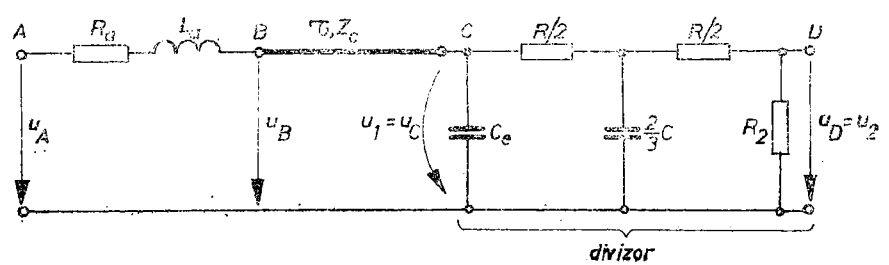


Fig. 4.26. Lanțul de măsurare ce include divizorul de tensiune rezistiv.

În aceste condiții, cuadripolul corespunzător divizorului de tensiune se consideră a fi constituit din doi cuadripoli conectați în lanț, adică

$$[A_d] = \begin{bmatrix} A_{11}^d & A_{12}^d \\ A_{21}^d & A_{22}^d \end{bmatrix} = [A_c][A_t]. \tag{4.95}$$

cuadripolul divizorului

cuadripolul capacității C_e

cuadripolul terminal

Matricea cuadripolului capacității ecran este

$$[A_e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{p}C_e & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.96}$$

Matricea cuadripolului terminal este

$$[A_t] = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{R}{R_2} + \mathrm{p}\dfrac{RC}{3}\left(\dfrac{R}{2R_2} + 1\right) & R + \mathrm{p}\dfrac{R^2C}{6} \\ \dfrac{1}{R_2} + \mathrm{p}C\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{R}{3R_2}\right) & 1 + \mathrm{p}\dfrac{RC}{3} \end{bmatrix}. \tag{4.97}$$

Din expresia (4.91) rezultă că este necesar a se calcula numai expresia lui A_{11}^d, deoarece se poate considera că divizorul funcționează în gol și A_{21}^d pentru calculul impedanței divizorului. Rezultă, dacă $R_2 \ll R$, pentru matricea terminală :

$$A_{11}^t = \frac{R}{R_2} + \mathrm{p}\frac{R^2C}{6R_2}; \qquad A_{21}^t = \frac{1}{R_2} + \mathrm{p}\frac{CR}{3R_2}. \tag{4.98}$$

Pentru matricea divizorului, se poate scrie

$$A_{11}^d = A_{11}^l = \frac{R}{R_2} + \mathrm{p}\,\frac{R^2C}{6\,R_2}; \tag{4.99}$$

$$A_{12}^d = A_{12}^l; \tag{4.100}$$

$$A_{21}^d = \mathrm{p}C_e A_{11}^l + A_{21}^l = \mathrm{p}C_e\left(\frac{R}{R_2} + \mathrm{p}\,\frac{R^2C}{6\,R_2}\right) + \frac{1}{R_2} + \mathrm{p}\,\frac{CR}{3R_2}; \tag{4.101}$$

$$A_{22}^d = \mathrm{p}C_e\, A_{12}^d + A_{22}^l. \tag{4.102}$$

Impedanța operațională a divizorului rezultă

$$Z_d = \frac{A_{11}^d(\mathrm{p})}{A_{21}^d(\mathrm{p})} = \frac{R(1 + \mathrm{p}T_3)}{\mathrm{p}C_eR(1 + pT_3) + 2\mathrm{p}T_3 + 1} \tag{4.103}$$

unde

$$T_3 = \frac{RC}{6}. \tag{4.104}$$

Pentru un lanț de măsurare adaptat la trecerea de la linia de racord la impedanța de amortizare, adică pentru $\mathfrak{Z}_a = \mathfrak{Z}_c$, factorul de reflexie corespunzător este nul

$$k_B(\mathrm{p}) = \frac{\mathfrak{Z}_a(\mathrm{p}) - \mathfrak{Z}_c(\mathrm{p})}{\mathfrak{Z}_a(\mathrm{p}) + \mathfrak{Z}_c(\mathrm{p})} = 0. \tag{4.105}$$

Dacă se consideră originea timpului momentul în care unda de tensiune ajunge la divizor, din relația (4.80) se obține

$$\varphi(\mathrm{p}) = \frac{1 + \dfrac{\mathfrak{Z}_a(0)}{\mathfrak{Z}_d(0)}}{1 + \dfrac{\mathfrak{Z}_a(\mathrm{p})}{\mathfrak{Z}_d(\mathrm{p})}} \cdot \frac{A_{11}^d(0)}{A_{11}^d(\mathrm{p})}, \tag{4.106}$$

iar răspunsul indicial rezultă conform relației (4.81)

$$f(t-\tau) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\mathrm{p}} \cdot \frac{1 + \dfrac{\mathfrak{Z}_a(0)}{\mathfrak{Z}_d(0)}}{1 + \dfrac{\mathfrak{Z}_a(\mathrm{p})}{\mathfrak{Z}_d(\mathrm{p})}} \cdot \frac{A_{11}^d(0)}{A_{11}^d(\mathrm{p})}\right\} = \mathfrak{L}^{-1}F(\mathrm{p}). \tag{4.107}$$

După transformări algebrice se obține în final expresia transformatei Laplace sub formă normată

$$\mathcal{F}(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2p\delta + \omega_0^2}, \tag{4.108}$$

unde:

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right);$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{T_2 T_3}\left(1 + \frac{Z_c}{R}\right);$$

$$T_1 = \frac{RC_e}{2}; \tag{4.109}$$

$$T_2 = Z_c C_e;$$

$$T_3 = \frac{RC}{6};$$

Răspunsul indicial poate avea două forme, după cum fenomenul este aperiodic sau oscilant amortizat și anume:

a. Răspuns aperiodic; $\delta^2 > \omega_0^2$; $\omega_e = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$;

$$f(t - \tau) = 1 - e^{-\delta t}\left(\operatorname{ch} \omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e} \operatorname{sh} \omega_e t\right). \tag{4.110}$$

b. Răspuns oscilant amortizat; $\omega_0^2 > \delta^2$; $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$;

$$f(t - \tau) = 1 - e^{-\delta t}\left(\cos \omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t\right); \tag{4.111}$$

După cum s-a arătat în cap. 2, în principiu se urmărește a se obține un răspuns amortizat. Timpul de răspuns se calculează cu relațiile (4.91) ... (4.94). Se obține în final

$$T_r = \frac{T_2 + T_3 + Z_c C/3}{1 + Z_c/R_2} \tag{4.112}$$

cu demonstrația din anexa 15.

Observația 1. Un divizor de tensiune se poate echivala, cu o mai bună aproximație, cu un lanț de cuadripoli. În anexa 16 se prezintă calculul parametrilor fundamentali ai matricei divizorului.

Observația 2. Dacă apar dificultăți la trecerea de la imagine la original, în scopul obținerii răspunsului sistemului de măsurare, se recurge la utilizarea metodei Bergeron [12, 56]. Pentru a ilustra utilitatea acestei metode, în anexa 17 se prezintă un calcul în care divizorul de tensiune este echivalent cu o rezistență.

Observația 3. Prin adaptarea liniei de racord cu impedanța de amortizare se elimină reflectarea în punctul B (fig. 4.24) a undei reflectate la intrarea în divizor, în punctul C. Impedanța de amortizare se construiește cu o rezistență antiinductivă de valoare $R_a = 300 \ldots 500\ \Omega$, adică valoarea acestei rezistențe egalează practic valoarea impedanței caracteristice a unui conductor tubular sau sub formă de bandă, așezat la cîțiva metri deasupra solului. Teoretic se poate elimina și unda reflectată la intrarea în divizor, dacă impedanța caracteristică a divizorului egalează pe cea a liniei de racord.

4.3.5. *Cablul coaxial*

Semnalul de măsurare, captat de la brațul de joasă tensiune al divizorului, este transmis osciloscopului catodic prin intermediul unui cablu coaxial. Un asemenea cablu cu izolație de polietilenă are o impedanță caracteristică de $50 \ldots 75\ \Omega$. Expresia impedanței cablului coaxial este de forma

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_0 + \mathrm{j}\,\omega L_0}{G_0 + \mathrm{j}\,\omega C_0}} \tag{4.113}$$

cu modulul

$$|Z_c| = \sqrt[4]{\frac{R_0^2 + \omega^2 L_0^2}{G_0^2 + \omega^2 C_0^2}}. \tag{4.114}$$

După cum rezultă din relațiile (4.113) și (4.114), valorile impedanței caracteristice, în complex sau modul, depind de frecvența de lucru. În același timp, trebuie menționat că mărimile lineice R_0 și G_0 depind, în oarecare măsură, de frecvența de lucru. În adevăr, fiecărei frecvențe îi este propriu un factor de majorare a rezistenței. De asemenea, pierderile depind și de frecvența de lucru. Pentru lungimi scurte de cablu coaxial, cu izolație bună, se poate aproxima

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \tag{4.115}$$

Din motivele menționate, adaptările care se practică la extremitățile cablului coaxial au o valabilitate limitată ca bandă de frecvență, cu atît mai mult cu cît impedanțele de adaptare sînt realizate sub forma unor rezistențe cu inductivitate redusă.

În cele ce urmează se prezintă principalele tipuri de adaptări utilizate în tehnica măsurărilor cu divizoare de tensiune.

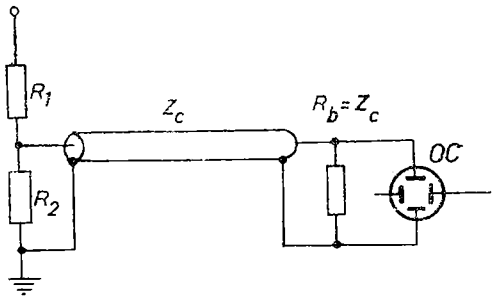


Fig. 4.27. Adaptarea cablului coaxial la divizorul de tensiune rezistiv.

Adaptarea divizorului rezistiv. Divizorul rezistiv se adaptează la extremitatea dinspre oscilograf, ca în fig. 4.27, cu o rezistență (cu inductivitate reziduală minimală) egală în valoare cu impedanța caracteristică a cablului coaxial. În acest mod se evită formarea undei reflectate, la extremitatea cablului spre oscilograful catodic. În raportul de divizare, rezistența brațului de joasă tensiune este rezistența obținută din conectarea în paralel a rezistenței R_2 cu rezistența R_b egală cu impedanța caracteristică a cablului coaxial.

Adaptarea divizorului capacitiv. La un astfel de divizor, cablul coaxial nu poate fi adaptat cu o rezistență la extremitatea spre osciloscraf, deoarece prezența acestei rezistențe modifică raportul de divizare. De aceea, adaptarea, în acest caz, se face cu ajutorul unei rezistențe egală în valoare cu impedanța caracteristică a cablul coaxial conectată la intrarea în cablul coaxial, ca în fig. 4.28. Pentru frecvențe relativ joase, reactanța oferită de condensatorul C_2 este neglijabilă față de rezistența $R_a = Z_c$ și deci se poate considera că, la plecare, cablul coaxial se închide pe impedanța caracteristică. Această conexiune este deosebit de importantă, deoarece unda de tensiune reflectată de extremitatea liberă — spre oscilograf — este total absorbită de extremitatea dinspre divizorul de tensiune.

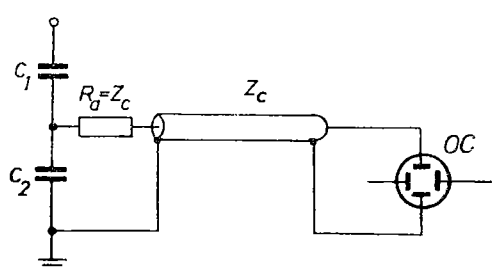


Fig. 4.28. Adaptarea cablului coaxial la divizorul de tensiune capacitiv.

Adaptarea divizorului mixt, serie, RC. Acest divizor poate fi considerat ca un divizor capacitiv amortizat. Astfel, adaptarea cablului coaxial se realizează ca în fig. 4.29, întocmai ca la divizorul capacitiv. Banda de frecvență a unui asemenea divizor poate ajunge pînă la 1 MHz. Pentru a realiza o bandă de frecvență mai mare, se recomandă [1, 5] schema din fig. 4.30, în care pe lîngă adaptarea de la extremitatea spre divizor cu rezistența $R_a = Z_c$, cablul coaxial se adaptează la extremitatea spre osciloscop cu rezistența $R_b = Z_c$ conectată în serie cu condensatorul C_b. Pentru a nu modifica raportul de divizare este necesar să fie satisfăcută relația

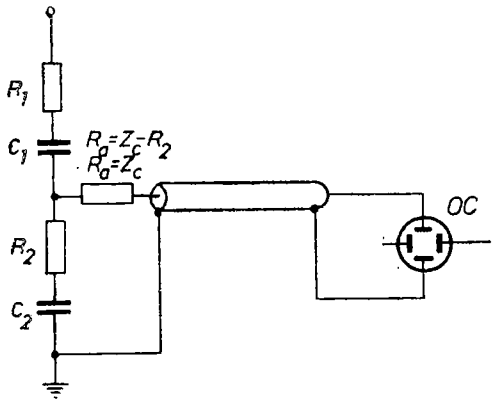


Fig. 4.29. Adaptarea cablului coaxial la divizorul de tensiune mixt, serie, *RC*.

$$C_1 + C_2 = C_c + C_b, \qquad (4.116)$$

în care : C_1, C_2 sînt capacitățile divizorului de tensiune ;
C_c este capacitatea cablului coaxial ;
C_b — capacitatea suplimentară la extremitatea cablului coaxial spre osciloscop.

Aceeași adaptare, descrisă de relația (4.116), poate fi aplicată și divizorului de tensiune pur capacitiv.

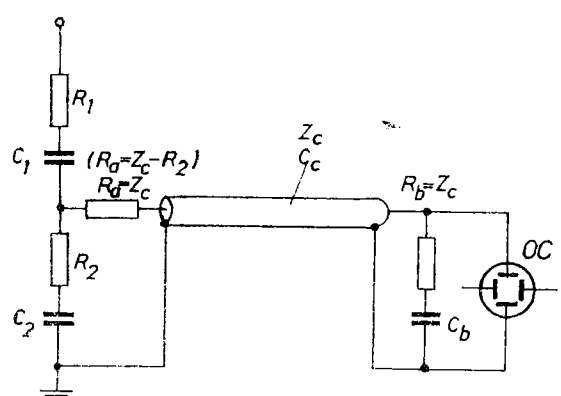


Fig. 4.30. Adaptarea cablului coaxial la divizorul de tensiune mixt, serie, *RC*, după Burch [1, 5].

Adaptare dublă spre divizorul de tensiune. O variantă mai nouă a divizorului capacitiv se bazează pe construcția brațului de înaltă tensiune sub forma unui condensator avînd ca dielectric azot, la aproximativ 15 at, sau hexafluorură de sulf la presiuni mai reduse, aproximativ 4 atmosfere [63]. În acest caz, este necesară o dublă adaptare spre divizorul

de tensiune, ca în fig. 4.31. Prima adaptare se efectuează, în mod normal, la captarea semnalului de pe divizor, înainte de intrarea în cablul coaxial, realizînd $R_1 = Z_{c1}$. A doua adaptare se realizează la terminaţia cablului coaxial de legătură între condensatorul de înaltă şi cel de joasă tensiune prin stabilirea egalităţii între impedanţa caracteristică Z_{c2} a acestui cablu şi valoarea rezistenţei R_2 de adaptare; adică $Z_{c2} = R_2$.

Reţea de corecţie. O nouă posibilitate constă în a stabili o reţea de corecţie pe partea de joasă tensiune a divizorului [61]. Se ridică experimental caracteristica de frecvenţă în amplitudine, pentru care se stabileşte funcţia de transfer, apoi cu ajutorul teoriei sintezei reţelelor se stabileşte o funcţie de transfer inversă, care serveşte ca element de plecare în stabilirea reţelei de corecţie.

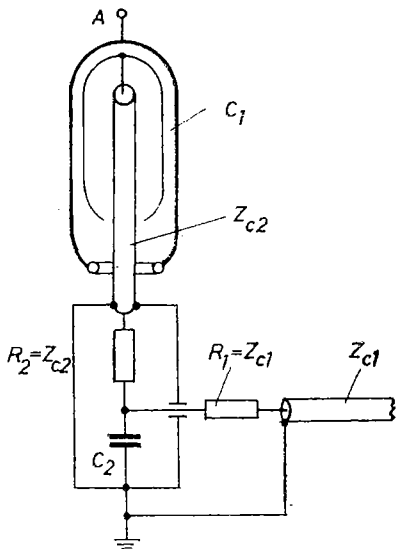


Fig. 4.31. Adaptarea unui divizor de tensiune capacitiv, după Schwab [63].

Numeroase alte soluţii privind apaptarea sînt propuse [52] pentru cazuri particulare, dar esenţial este ca lungimea cablului coaxial să rămînă cît mai scurtă (20 ... 30 m), în scopul evitării distorsiunilor produse de un cablu coaxial prea lung.

4.4. Exemple de construcţii

La realizarea unui divizor se iau în considerare numeroşi factori cum sînt:

a) natura şi amplitudinea solicitării: tensiune de impuls, alternativă sau continuă;

b) durata solicitării, dată la solicitarea de impuls prin funcţia de timp ce descrie tensiunea de impuls, precum şi repetitivitatea solicitării;

c) locul divizorului în schema de măsurare şi amplasarea lui în staţia de încercări.

În cele ce urmează, se vor prezenta, ca exemple, două construcţii diferite pentru divizoare realizate şi anume: un divizor de tensiune

rezistiv pentru măsurarea tensiunilor de impuls și un divizor mixt, serie, RC pentru măsurarea tensiunii de restabilire.

4.4.1. *Divizor de tensiune rezistiv pentru 1,6 MV tensiune de impuls*

De mare însemnătate pentru un asemenea divizor este să se precizeze valoarea rezistenței și solicitarea dielectrică.

Valoarea rezistenței. În principiu, cu cît valoarea rezistenței este mai mare, cu atît solicitarea termică este mai redusă la o tensiune de lucru U dată. Energia dezvoltată prin efect Joule în rezistența divizorului este

$$W = \int_0^t P \, dt \quad \frac{1}{R} \int_0^t u^2 \, dt. \tag{4.117}$$

Dar rezistența nu se poate lua oricît de mare, deoarece timpul de răspuns crește proporțional cu rezistența divizorului după relația (4.58) considerînd divizorul singur, sau după relația (4.112), la considerarea întregului lanț de măsurare. Cu cît tensiunea de lucru este mai mare, cu atît și capacitatea față de pămînt a coloanei divizorului este mai mare și ca urmare, valoarea rezistenței trebuie limitată. În cazul practic, al divizorului realizat, s-a ales rezistența $R = 10\,000\ \Omega$, la o capacitate față de pămînt $C = 34{,}81$ pF. Timpul de răspuns nu poate fi mai bun decît

$$T_r = \frac{RC}{6} = \frac{10\,000 \cdot 34{,}81 \cdot 10^{-12}}{6} = 58 \cdot 10^{-9}\ \text{s},$$

în regim aperiodic sau puternic amortizat. În regim oscilant se pot obține valori mai mici ale timpului de răspuns, față de $58 \cdot 10^{-9}$ s. Rezistența este realizată prin bobinarea neinductivă a unui conductor rezistiv cu $\varnothing = 0{,}3$ mm, emailat și izolat dublu cu mătase, pe un tub de pertinax cu diametrul variabil în trei trepte.

Solicitarea dielectrică. În vederea realizării unui cîmp electric cît mai constant în lungul coloanei divizorului, acesta se echipează la partea superioară cu un ecran de mari dimensiuni, iar la partea inferioară se prevede un inel la potențialul pămîntului, dar situat la oarecare distanță față de pămînt, ca în fig. 4.32. Solicitarea dielectrică se determină dacă în prealabil se calculează capacitățile parazite

ale divizorului. În fig. 4.33 se prezintă o schiță din care rezultă că aceste capacități parazite sînt următoarele :

C_{ep} — capacitatea ecranului față de pămînt ;
C_p — capacitatea față de pămînt a coloanei divizorului ;
C_m — capacitatea mutuală între două secțiuni din coloana divizorului ;
C_{ec} — capacitatea ecranului față de coloana divizorului.

O metodă practică și rapidă pentru calcularea capacităților parazite menționate constă în modelarea cîmpului electric cu ajutorul băii electrolitice. Pentru divizorul realizat s-au obținut rezultatele de modelare prezentate în fig. 4.34 . . . 4.39.

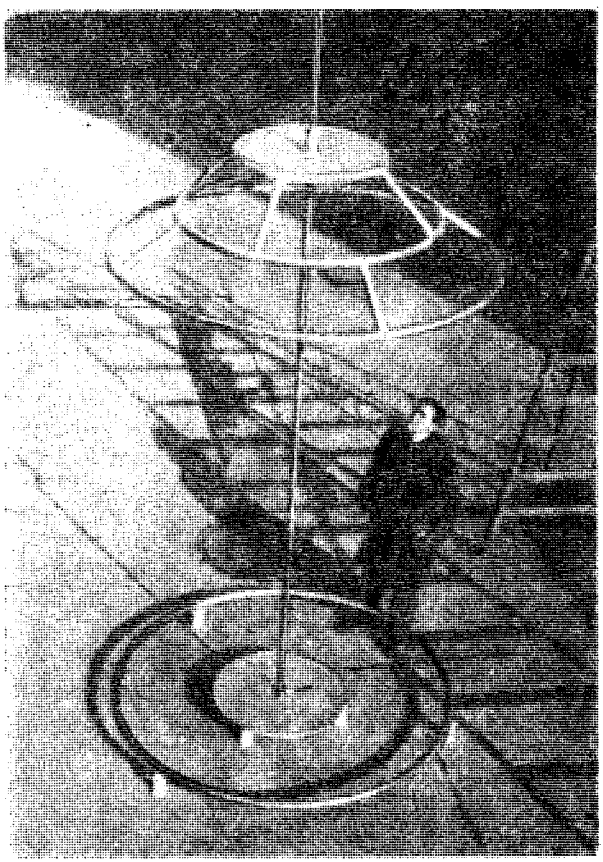


Fig. 4.32. Divizor rezistiv cu ecran de 1,6 MV.

În fig. 4.34 s-a desenat cîmpul electric al ecranului față de pămînt. Suprafețele echipotențiale sînt numerotate cu 0,0 ; 0,1 . . .0,9 ; 1,0. Aceste suprafețe s-au determinat cu ajutorul modelării tridimensionale cu simetrie axială. Capacitatea ecranului față de pămînt se calculează cu relația bine cunoscută [57]

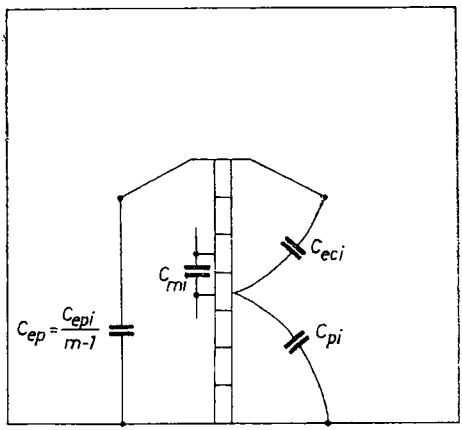


Fig. 4.33. Referitor la capacitățile parazite.

$$C_{ep} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{n}{m-1} k \cdot k_1 \quad (4.118)$$

în care : $k = \varepsilon_r r \frac{b}{a}$; $r \frac{b}{a} =$ = const ;

r este raza tubului de flux constant ;

b — lățimea tubului de flux constant ;

a — înălțimea tubului de flux constant ;

k_1 este scara de reducere a modelului față de original ;

n — numărul de tuburi de flux electric constant ;

m — numărul de suprafețe echipotențiale.

Suprafețele echipotențiale secționează, imaginar, tubul rezistiv și determină astfel capacități echivalente egale, deoarece sarcina electrică se conservă, iar diferența de potențial rămîne constantă.

În fig. 4.35 s-a desenat cîmpul electric al coloanei divizorului față de pămînt, în scopul determinării capacității C_{pi} a diferitelor segmente de tub rezistiv, față de pămînt.

Capacitatea mutuală C_{mi} se calculează cu relația

$$C_{mi} = \frac{C_{0n} \cdot C_{0(n+1)}}{C_{0n} + C_{0(n+1)}}, \quad (4.119)$$

în care : C_{0n} și $C_{0(n+1)}$ sînt capacitățile unor segmente adiacente din tubul rezistiv față de un plan de referință, care trece perpendicular pe coloana tubului rezistiv, ca în fig. 4.36.

În fig. 4.37 s-a trasat cîmpul electric al ecranului față de coloana divizorului, în scopul determinării capacităților C_{eci}, a segmentelor din tubul rezistiv față de ecran.

În final, rețeaua de rezistențe și capacități se prezintă ca în fig. 4.38, în care s-a neglijat inductivitatea reziduală a bobinajului realizat neinductiv, a divizorului de tensiune. Schema electrică

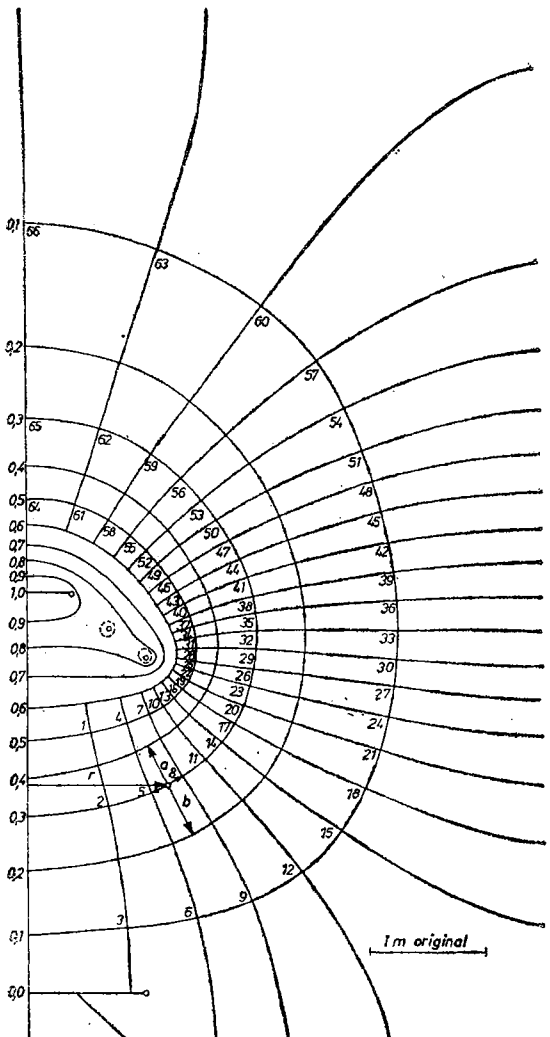


Fig. 4.34. Cîmpul electric al ecranului față de pămînt.

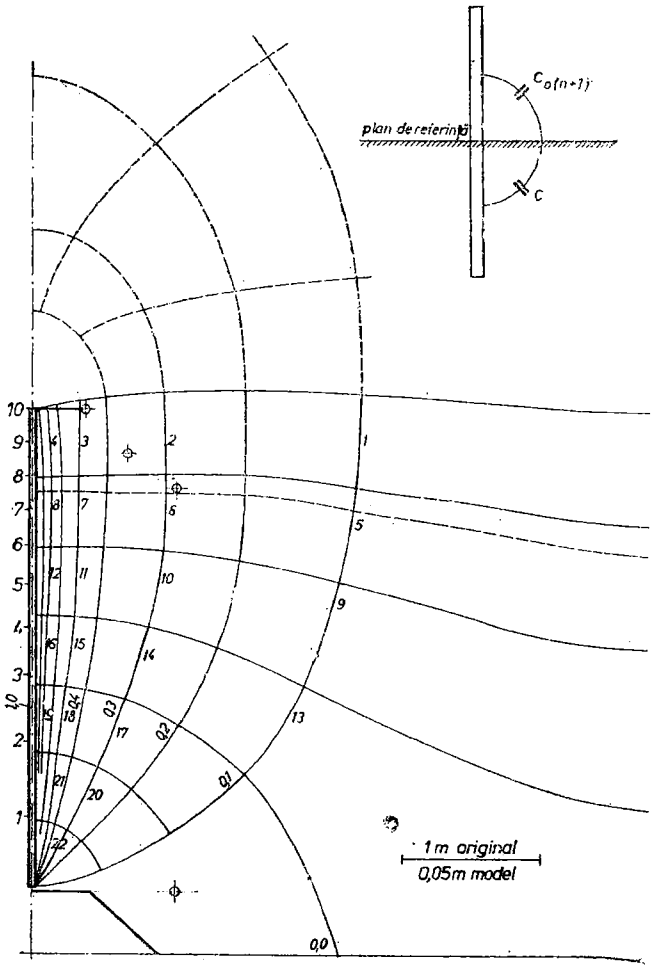


Fig. 4.36. Referitor la calculul capacităților mutuale.

Fig. 4.35. Cîmpul electric al coloanei divizorului față de pămînt.

din fig. 4.38 a servit la realizarea unui model fizic, în care rezistențele s-au menținut egale cu rezistențele din original, iar valorile capacităților, trecute în paranteză, au fost majorate de 10 ori. Majorarea capacităților în model s-a făcut în scopul eliminării influenței

capacităţilor parazite ale conexiunilor. Modelul astfel realizat reprezintă o reţea *RC*, în care timpul este dilatat de zece ori. O excitare a modelului cu unda de impuls 1,5/50 μs şi 15/500 μs va arăta comporta-

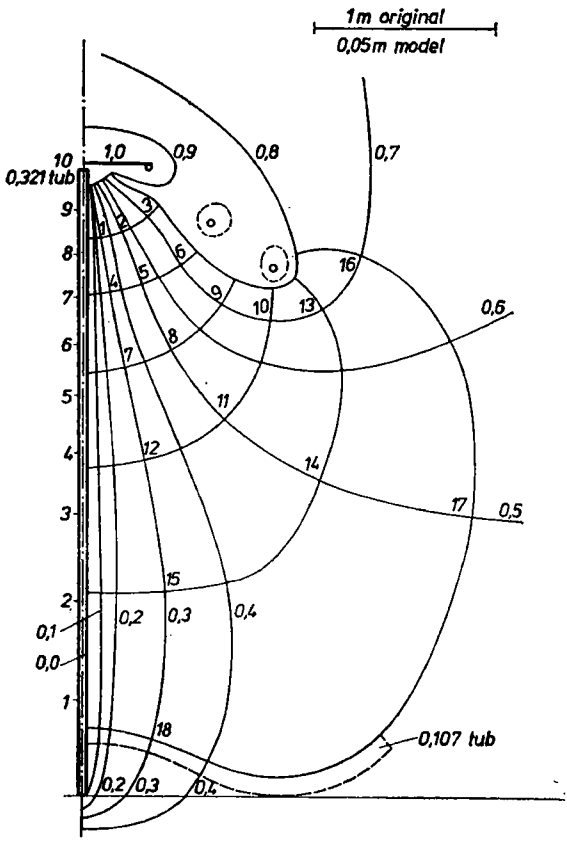


Fig. 4.37. Cîmpul electric al ecranului faţă de coloana divizorului.

rea originalului la excitarea cu unda de impuls 0,15/5 μs, respectiv 1,5/50 μs. În fig. 4.39, curba *1* reprezintă repartiţia tensiunii în lungul divizorului de tensiune, repartiţie obţinută pe model la excitarea acestuia cu undele de impuls 0,15/5 μs şi 1,5/50 μs. Curba *2*, din aceeaşi figură, arată repartiţia tensiunii datorată ecranului, în acord

cu cîmpul electric prezentat în fig. 4.34. Se constată că, prezența ecranului este de natură să determine în mod decisiv solicitarea dielectrică în lungul divizorului, deoarece cele două curbe *1* și *2*, sînt foarte apropiate una de alta.

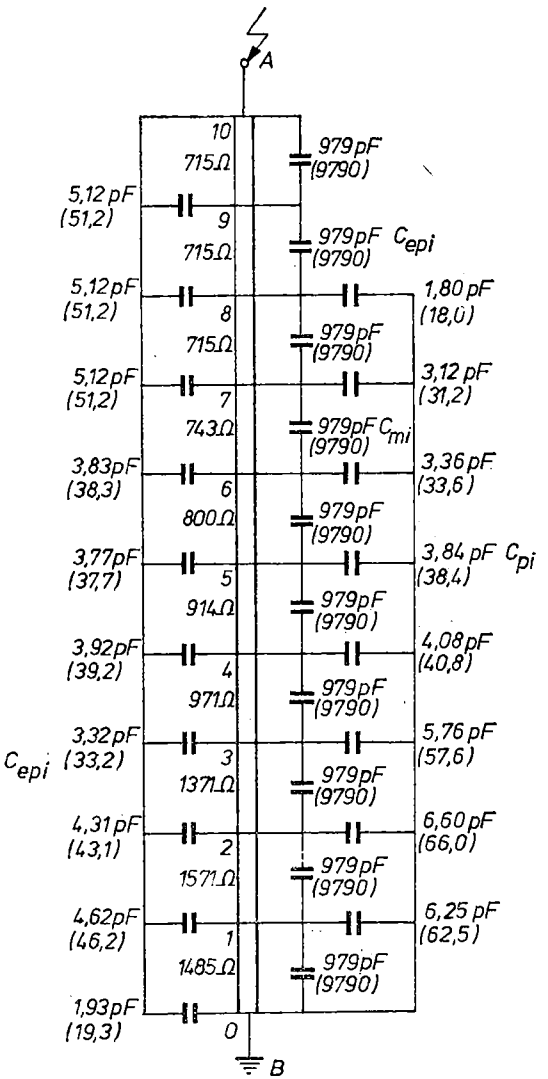


Fig. 4.38. Rețeaua echivalentă de capacități și rezistențe.

Performanțele divizorului rezistiv, ecranat, construit, rezultă din timpul de răspuns măsurat direct sau din caracteristica de frecvență.

În fig. 4.40 se prezintă răspunsul indicial al divizorului la excitația treaptă de tensiune, la trei valori diferite ale rezistenței de amorti-

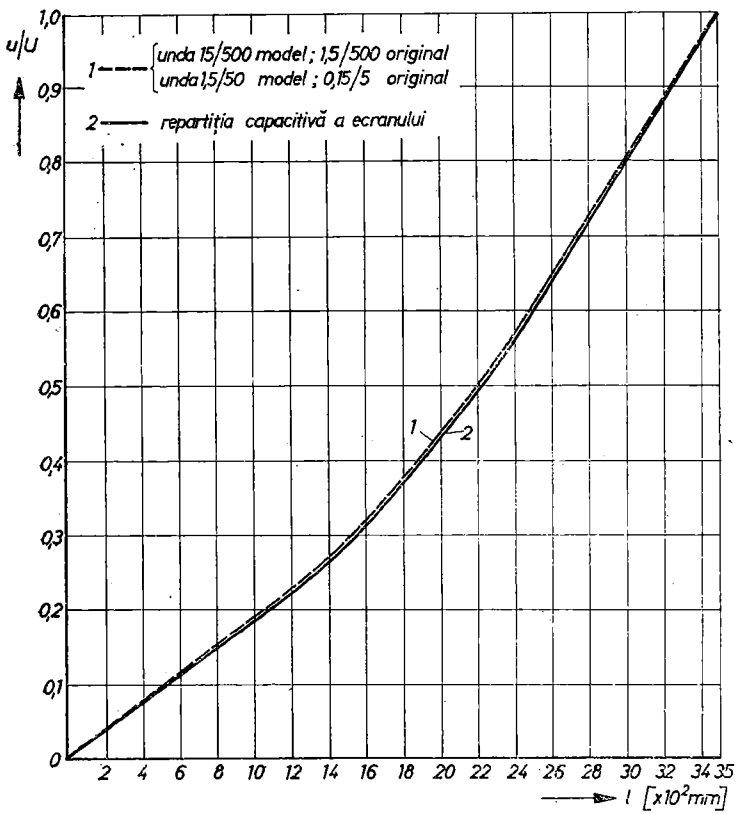


Fig. 4.39. Repartiția tensiunii în lungul coloanei divizorului:

1 — curba rezultantă; *2* — curba datorită ecranului.

zare R_1, plasată pe linia de racord între sursă și divizorul de tensiune. Parametrii răspunsului sînt prezentați în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1

Parametrii răspunsului indicial din fig. 4.40

Oscilograma	*a*	*b*	*c*	*d*
Factorul de oscilație	1,4	1,27	1,15	1,06
T_r, ns	19	24	48	74,5
R_a, Ω	0	120	250	500

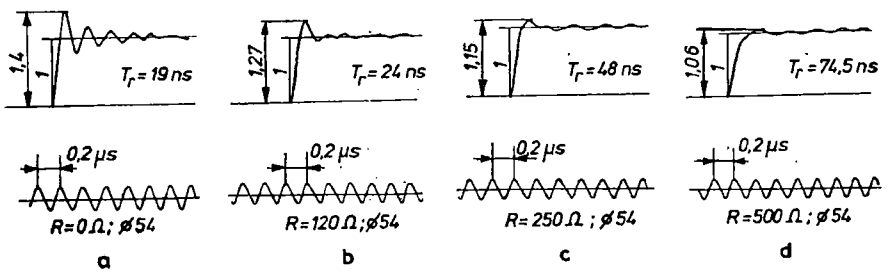


Fig. 4.40. Răspunsul indicial (vezi tabelul 4.1) al divizorului de 1,6 MV.

Se poate constata deci că, în absența rezistenței de amortizare, în mod aparent răspunsul este mai bun, luînd în considerare criteriul timpului de răspuns, dar în acest caz răspunsul este oscilant amortizat cu factorul de oscilație 1,4. Prezența rezistenței de amortizare crește timpul de răspuns, dar reduce sensibil oscilațiile. De asemenea, diametrul conductorului sau lățimea benzii, din care este construită linia de racord, are influență asupra funcției indiciale, în sensul că un diametru mai mare, sau o lățime de bandă mai mare, determină diminuarea oscilațiilor. În montajul experimentat diametru conductorului a fost ø = 54 mm.

Caracteristica de frecvență în amplitudine a divizorului construit este dată în fig. 4.41. Se constată că banda de frecvență a divizorului este 7 MHz la o atenuare de 3 dB. Tendința de oscilație în primul interval se datorează liniei de racord, iar tendința de oscilație către frecvența de 20 MHz se datorește cablului coaxial pe partea de joasă tensiune a divizorului.

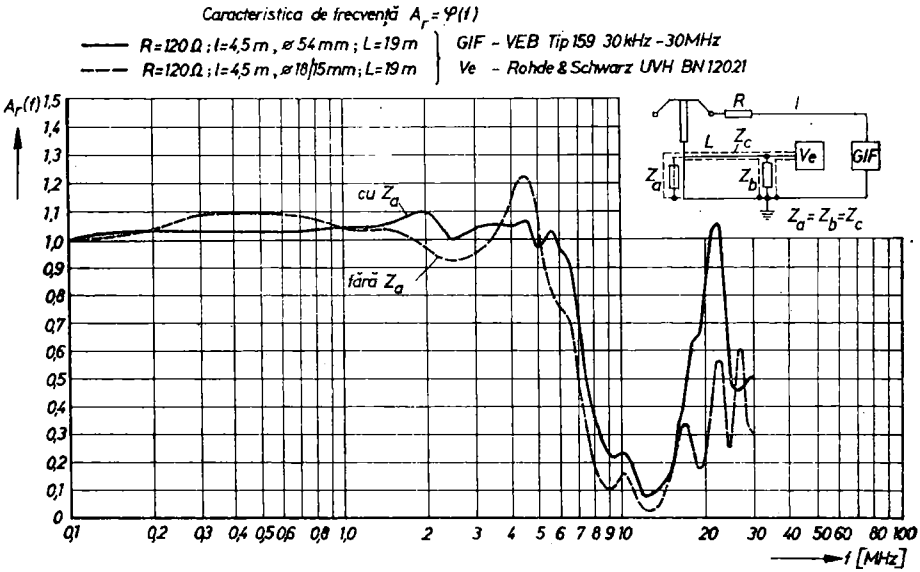


Fig. 4.41. Caracteristica de frecvență în amplitudine a divizorului de 1,6 MV.

4.4.2. *Divizor mixt, serie, RC pentru tensiunea alternativă de 20 kVef*

Un asemenea divizor este folosit la măsurarea tensiunii oscilante de restabilire a întreruptoarelor de putere. În aceste condiții de utilizare apar solicitări dielectrice și termice specifice.

Solicitări dielectrice. Valoarea de vîrf a tensiunii de restabilire la care este supus divizorul în schema de încercare, [32] este

$$u = \frac{\gamma\, 1{,}5 \sqrt{2}\, U_n}{\sqrt{3}} \approx 40\ \mathrm{kV_{max}} \qquad (4.120)$$

unde: $\gamma = 1{,}6$ este factorul de oscilație al tensiunii de restabilire;
$U_n = 20$ kV— tensiunea nominală.

Raportul teoretic de divizare este 40 kV/10 V = 4 000. Brațul de înaltă tensiune al divizorului este constituit din cinci condensatoare ceramice de cîte 1250 pF și cinci rezistențe de cîte 100 Ω. Condensatoarele sînt încercate la $U_i = 12\ \mathrm{kV_{ef}}$, iar rezistențele au o tensiune de conturnare $U_c = 200$ V.

Valoarea efectivă a curentului la tensiunea maximă este

$$I = \frac{1{,}5\ U_n}{\sqrt{3}\sqrt{R^2+1/C^2\omega^2}} = 1{,}37 \cdot 10^{-3}\ \text{A}. \qquad (4.121)$$

Căderea de tensiune pe o rezistenţă, la frecvenţa industrială, este

$$U_R = \sqrt{2}I \cdot R_1 = 2 \cdot 1{,}37 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0{,}19\ V_{\max}.$$

Deci căderea de tensiune pe rezistenţă este extrem de mică faţă de căderea de tensiune pe condensator. Tensiunea oscilantă de

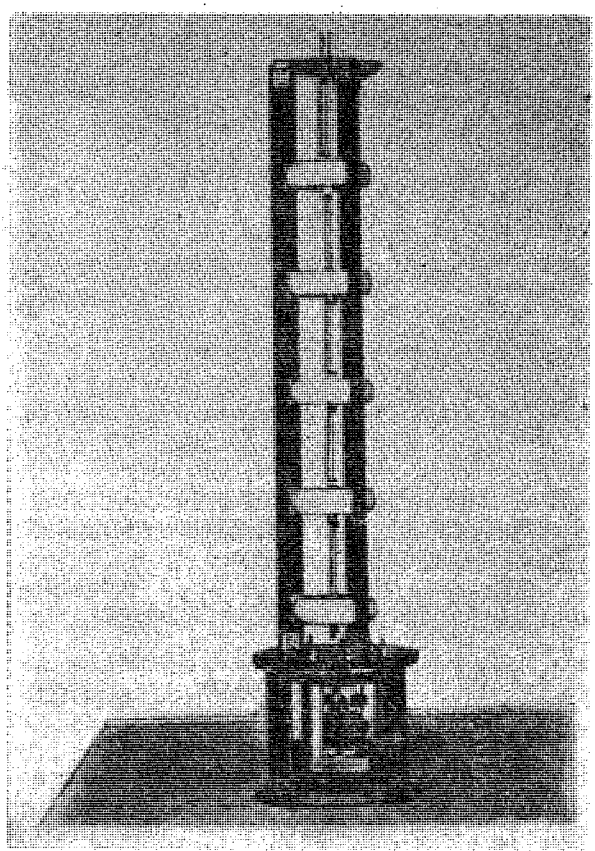


Fig. 4.42. Divizor mixt, serie *RC* de 40 kV.

restabilire are o frecvenţă sensibil superioară frecvenţei industriale şi ca urmare, reactanţa condensatoarelor va fi, ca mărime relativă, superioară reactanţei la 50 Hz.

Un condensator este supus solicitării dielectrice maxime

$$u_c = \frac{u}{n} = \frac{40 \cdot 10^3}{5} = 8 \cdot 10^3 \text{ V}. \qquad (4.122)$$

Solicitări termice. Acestea sînt extrem de reduse, atît pentru rezistenţe ($P = \Delta U_R \cdot I$), cît şi pentru condensatoare, care au pierderi reduse, fiind destinate a lucra în circuite de înaltă frecvenţă.

În fig. 4.42 se vede ansamblul divizorului de tensiune mixt, serie, RC. În zona inferioară este plasat braţul de joasă tensiune, care are aceeaşi constantă de timp ca braţul de înaltă tensiune, adică

$$R_1 C_1 = R_2 C_2 = \tau = 105{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ s}. \qquad (4.123)$$

În braţul de joasă tensiune se montează şi un descărcător pentru a proteja oscilograful de eventualele supratensiuni accidentale. Caracteristica de frecvenţă în amplitudine este trasată în fig. 4.43

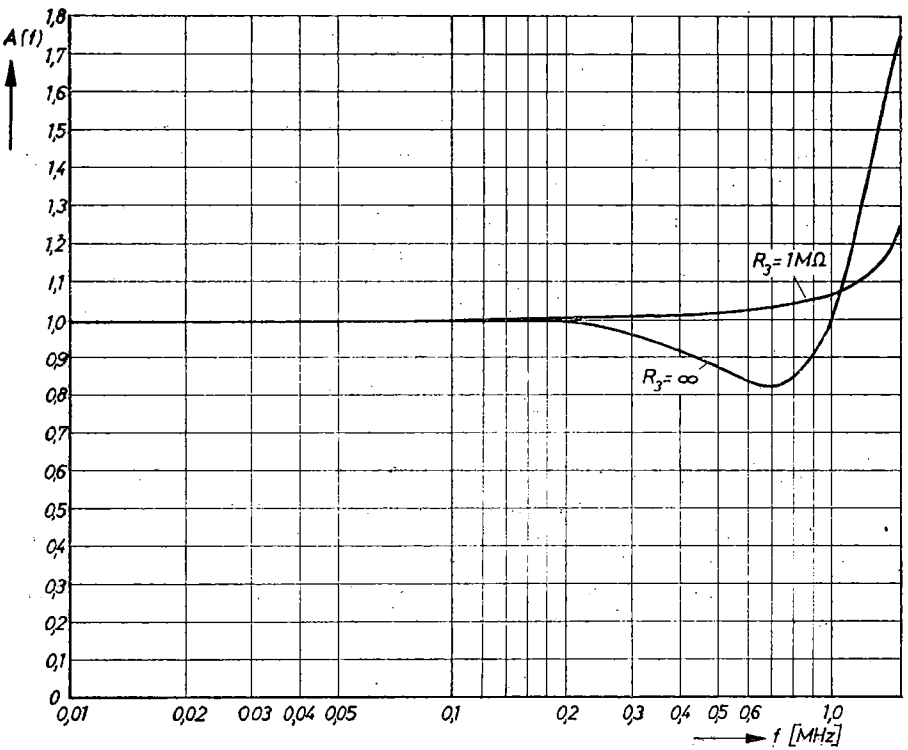


Fig. 4.43. Caracteristica de frecvenţă în amplitudine a divizorului de tensiune de 40 kV.

pentru două valori ale rezistenței terminale ale cablului coaxial și anume $R_3 = \infty$ și $R_3 = 1$ MΩ. Banda de frecvență în cazul rezistenței terminale de 1 MΩ este de 1,4 MHz.

4.4.3. *Date suplimentare privind construcția divizoarelor de tensiune*

Condițiile de exploatare, ca și tensiunile de încercare din ce în ce mai mari, conduc la necesitatea de a folosi divizoare de tensiune cu performanțe superioare cu dimensiuni cît mai reduse.

Cu privire la amortizarea divizoarelor mixte, serie, RC. Un divizor mixt, serie, RC trebuie acordat, în ceea ce privește rezistența de amortizare, pentru fiecare montaj de încercare, astfel valoarea rezistenței R ce intră în structura divizorului, după Zaengl [70], este

$$R \approx 4\sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{4.124}$$

unde L este inductivitatea totală a circuitului de măsurare, iar C este capacitatea totală a divizorului rezultată din conectarea în serie a capacităților discrete.

În cazul unui divizor de tensiune utilizat în același timp drept capacitate de sarcină a unui generator de impuls și dispozitiv de măsurare, Feser [17] arată că se poate utiliza un divizor de tensiune cu amortizare slabă, care include în brațul de înaltă tensiune rezistența

$$R(0{,}25 \ldots 1{,}25)\sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{4.125}$$

iar brațul de joasă tensiune nu cuprinde rezistențe amortizoare.

Cu privire la adaptarea cablului de măsurare. În cazul divizoarelor mixte, serie, RC, ca în figurile 4.29 și 4.30, cablul de măsurare se conectează la divizor prin intermediul unei rezistențe care diferă de valoarea impedanței caracteristice a cablului de măsurare. Valoarea acestei rezistențe este

$$R_a = Z_c - R_2. \tag{4.126}$$

Această corecție se efectuează pentru cazul în care rezistența R_2, în brațul de joasă tensiune, are valori semnificative față de valoarea

impedanţei caracteristice. În acest fel, pentru frecvenţe înalte, reactanţa condensatorului din braţul de joasă tensiune fiind considerată nulă, cablul de măsurare se închide pe impedanţa caracteristică.

Cu privire la ecranele divizoarelor rezistive. La măsurarea tensiunilor de impuls foarte mari, de exemplu peste 2 MVA, se utilizează divizoare de tensiune rezistive cu ecrane multiple distribuite în lungul divizorului [16]. Aceste ecrane au dimensiuni mai mari spre zonele cu tensiune mai ridicată. Rezultă astfel capacităţi longitudinale variabile în lungul ecranului, de natură să asigure o distribuţie uniformă a tensiunii în lungul divizorului de tensiune. În afară de acest rol, prin forma şi dimensiunile electrozilor, se urmăreşte şi evitarea descărcărilor parţiale şi o diminuare a intensităţii cîmpului electric în jurul divizorului de tensiune.

5. Spectre de frecvenţă

Şunturile şi divizoarele de tensiune sînt convertoare de mărimi electromagnetice variabile în timp, mărimi caracterizate şi prin spectre de frecvenţă proprii. Este absolut necesar a se cunoaşte spectrele de frecvenţă ale mărimilor de intrare, în convertoare, în scopul dimensionării acestor convertoare la banda de frecvenţă necesară obţinerii unor semnale de măsură nedeformate.

Pentru a oferi o imagine asupra benzilor de frecvenţă ce se cer şunturilor şi divizoarelor de tensiune, în tabelul 5.1, pentru cîteva unde de curent şi tensiune reprezentative, se prezintă :

a) forma şi denumirea undei ;

b) expresia analitică a undei ;

c) expresia analitică a spectrului de frecvenţă.

Diagramele corespunzătoare expresiilor analitice ale spectrelor de frecvenţă sînt prezentate în fig. 5.1 . . .5.8, în acord cu trimiterile din tabelul 5.1.

Calculul expresiilor analitice s-a efectuat cu ajutorul transformantei Fourier, pentru funcţii $F(t)$ nule la $t < 0$

$$\underline{F}(j\omega) = \int_0^\infty F(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{5.1}$$

Limita superioară a integralei a luat valoarea ∞ la funcţiile de timp a căror existenţă se extinde la infinit şi valori finite pentru undele cu existenţă limitată în timp, cum este cazul impulsului, a undei de impuls tăiate, a curentului sinusoidal tăiat etc.

Densitatea spectrală sau spectrul de frecvenţă s-a onţinut după efectuarea calculelor cerute de relaţia (5.1) şi separarea părţii reale şi imaginare, cu relaţia

$$|\underline{A}(j\omega)| = \sqrt{R_e^2[\underline{F}(j\omega)] + I_m^2[\underline{F}(j\omega)]}. \qquad (5.2)$$

Unele rezultate, trecute în tabelul 5.1 şi în diagramele la care se face trimiterea în tabelul menţionat, merită a fi scoase în evidenţă, după cum urmează:

a. Componenta aperiodică a curentului de scurtcircuit a fost reprezentată prin curba exponenţială, poziţia 2. Spectrul de frecvenţă

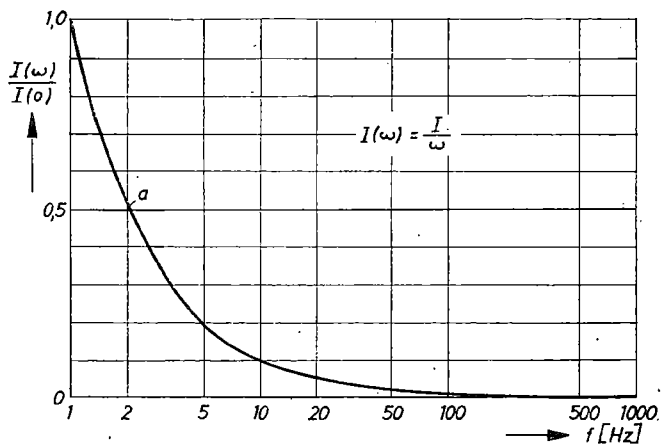
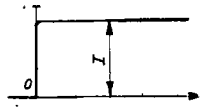
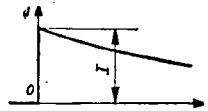
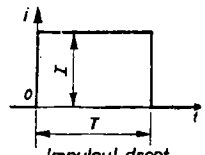
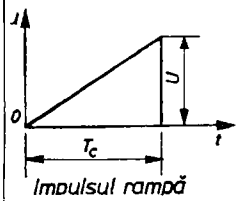


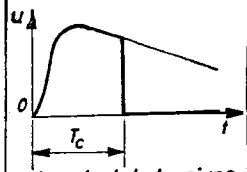
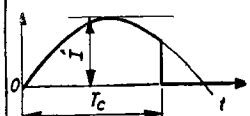
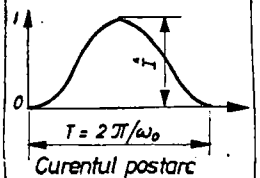
Fig. 5.1. Spectrul de frecvenţă al excitaţiei treaptă.

corespunzător, desenat în fig. 5.2, arată că pentru măsurarea acestei componente este suficient ca şuntul corespunzător să aibă o bandă de frecvenţă de numai 1 000 Hz.

b. Banda de frecvenţă a unui divizor de tensiune utilizat la măsurarea undei de impuls de tensiune tăiată, poziţia 5, este relativ largă dacă tăierea undei se efectuează pe frontul undei. Astfel, banda de frecvenţă necesară este de numai 0,75 MHz, dacă unda este tăiată la 50 μs ca în fig. 5.6 şi de 40 MHz, dacă tăierea se efectuează la 0,5μs, ca în fig. 5.5.

Spectrul de frecvență al unor unde *Tabelul 5.1*

Nr. crt.	Unda		Spectrul de frecvență	
	Forma și denumirea	Expresia analitică	Expresia analitică	Forma
4	 Treaptă	$i=0,\ t<0$ $i=I,\ t>0$	$I(\omega)=\dfrac{I}{\omega}$	Fig. 5.1
2	 Exponențială	$i=0,\ t<0$ $i=Ie^{-\lambda t},\ t>0$ $\lambda=22{,}311\ s^{-1}$	$I(\omega)=\dfrac{I}{\sqrt{\lambda^2+\omega^2}}$	Fig. 5.2
3	 Impulsul drept	$i=I,\ 0<t<T$ $i=0,\ t<0\ ;\ t>T$	$I(\omega)=2I\dfrac{\sin\dfrac{\omega T}{2}}{\omega}$	Fig. 5.3 $T=10^{-6}$ s $T=10^{-3}$ s
4	 Impulsul rampă	$u=U\dfrac{t}{T_c},\ 0\leqslant t\leqslant T_c$ $u=0,\ t<0\ ;\ t>T_c$	$U(\omega)=$ $=\dfrac{U\sqrt{\omega^2T_c^2+2(1-\cos\omega T_c-\omega T_c\sin\omega T_c)}}{\omega^2T_c}$	Fig. 5.4 $T_c=0{,}1\ \mu s$ $T_c=0{,}2\ \mu$ $T_c=1\ \mu s$

5	 Impulsul de tensiune standard 1,2|50 μs tăiată după timpul T_c	$u = k(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}})$ $T_1 = 69.10^{-6}$ s $T_2 = 0{,}395.10^{-6}$ s $u = 0$; $t < 0$; $t > T_c$	$\frac{U(j\omega)}{k} =$ $= \left\{ \frac{T_1}{1+T_1^2\omega^2}\left[1+e^{-\frac{T_c}{T_1}}(\omega T_1 \sin\omega T_c - \cos\omega T_c)\right] - \right.$ $\left. - \frac{T_2}{1+T_2^2\omega^2}\left[1+e^{-\frac{T_c}{T_2}}(\omega T_2 \sin\omega T_c - \cos\omega T_c)\right]\right\} -$ $- j\left\{\frac{T_1}{1+T_1^2\omega^2}\left[\omega T_1 - e^{-\frac{T_c}{T_1}}(\omega T_1 \cos\omega T_c + \right.\right.$ $\left. + \sin\omega T_c)\right] -$ $\left. - \frac{T_2}{1+T_2^2\omega^2}\left[\omega T_2 - e^{-\frac{T_c}{T_2}}(\omega T_2 \cos\omega T_{1c} + \sin\omega T_c)\right]\right\}$	Fig. 5.5 $T_c = 0{,}1$ μs $T_c = 0{,}5$ μs Fig. 5.6 $T_c = 10$ μs $T_c = 50$ μs
6	 Curentul sinusoidal tăiat după timpul T_c	$i = \hat{I}\sin\omega_0 t$ $0 \leqslant t \leqslant T_c$ $i = 0$, $t < 0$; $t > T_c$	$I(\omega) = \frac{\hat{I}}{\omega_0\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \times$ $\times \sqrt{2+\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1\right)\sin^2\alpha_0 - \frac{2\omega}{\omega_0}\sin\alpha\sin\alpha_0 - 2\cos\alpha\cos\alpha_0}$ $\alpha = \omega T_c$; $\alpha_0 = \omega_0 T_c$; $\omega_0 = 314\ s^{-1}$	Fig. 5.7 $T_c = 5$ ms $T_c = 9$ ms
7	 Curentul postarc	$i = \frac{\hat{I}}{2}(1 - \cos\omega_0 t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ $i = 0$, $t > T$; $t < 0$	$I(\omega) = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos(2\pi\omega/\omega_0)}}{\omega(1-\omega^2/\omega_0^2)}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	Fig. 5.8 $T = 1$ μs curent postarc dielectric $T = 10$ μs curent postarc termic

c. Banda de frecvență a unui șunt destinat a măsura curentul postarc este de numai 0,3 MHz dacă se măsoară un curent postarc termic și de peste 2 MHz dacă se măsoară un curent postarc dielectric, cum se arată în poziția 7 și în fig. 5.8.

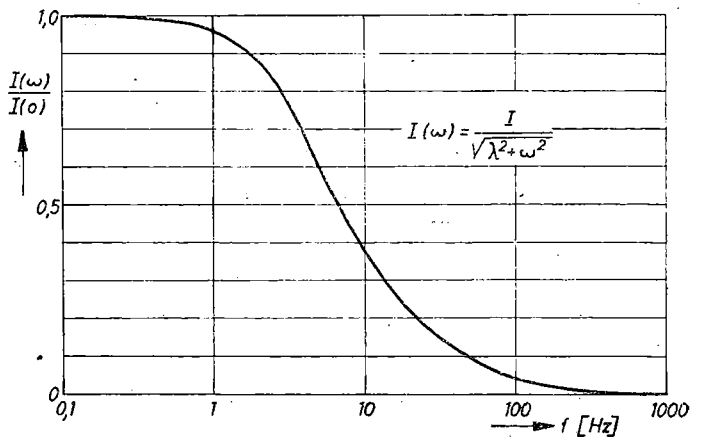


Fig. 5.2. Spectrul de frecvență al unei exponențiale.

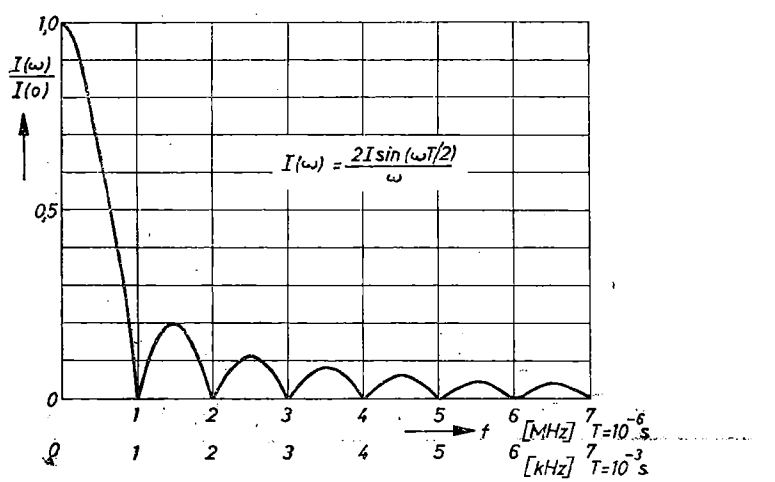


Fig. 5.3. Spectrul de frecvență al impulsului drept.

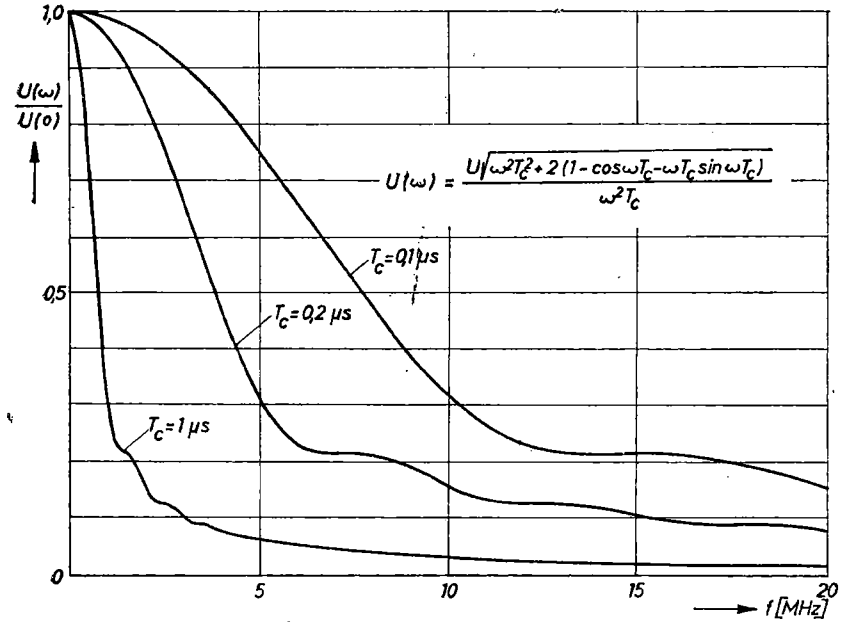


Fig. 5.4. Spectrul de frecvență al unui impuls rampă.

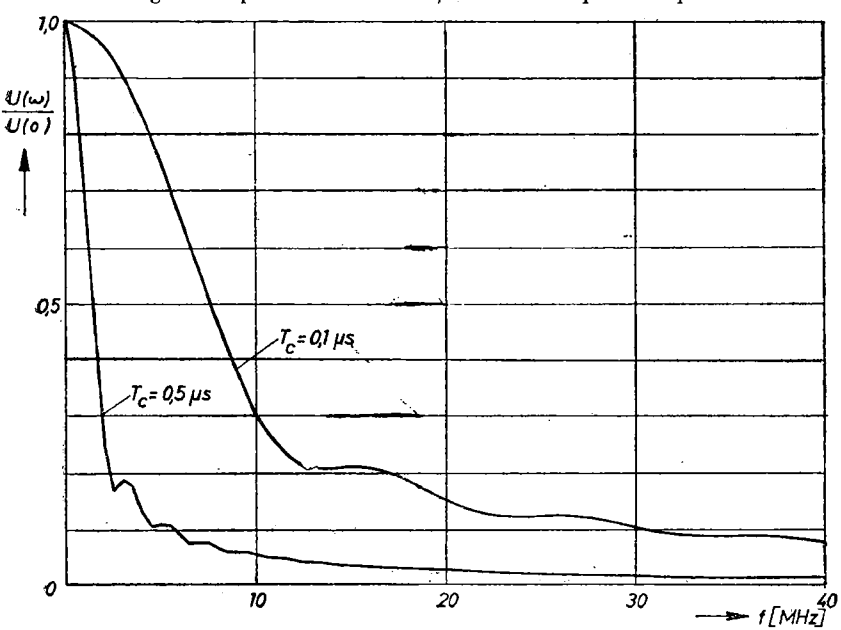


Fig. 5.5. Spectrul de frecvență pentru unda de impuls standard, tăiată.

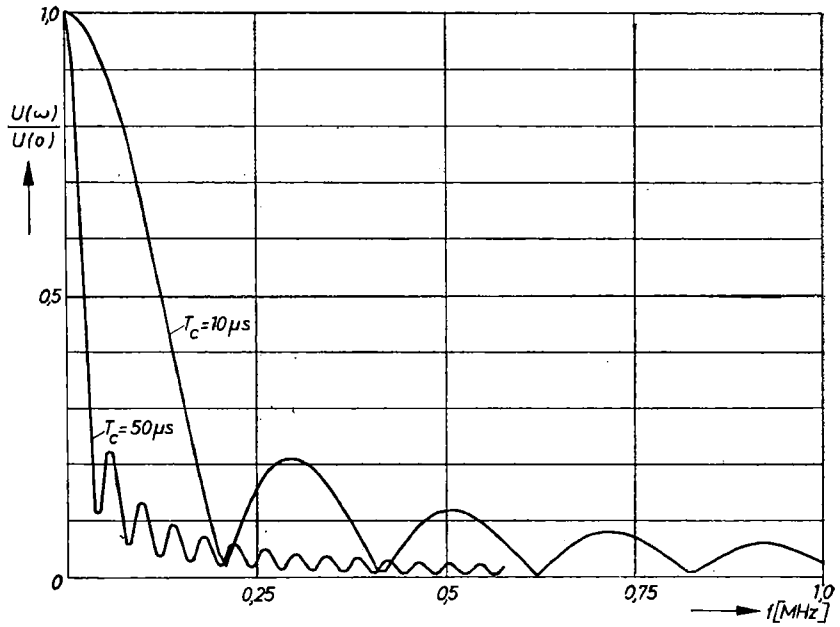


Fig. 5.6. Spectrul de frecvență pentru unda de impuls tăiată (continuare).

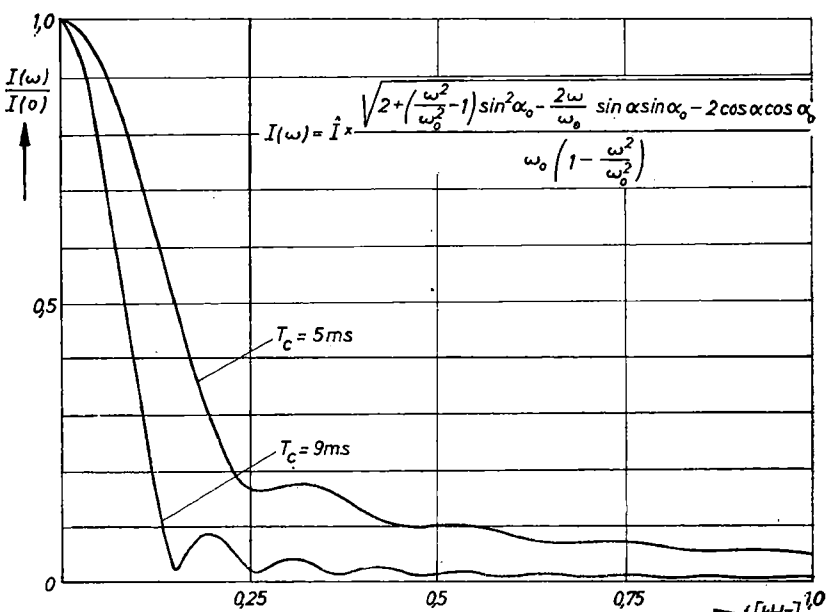


Fig. 5.7. Spectrul de frecvență pentru curentul sinusoidal tăiat.

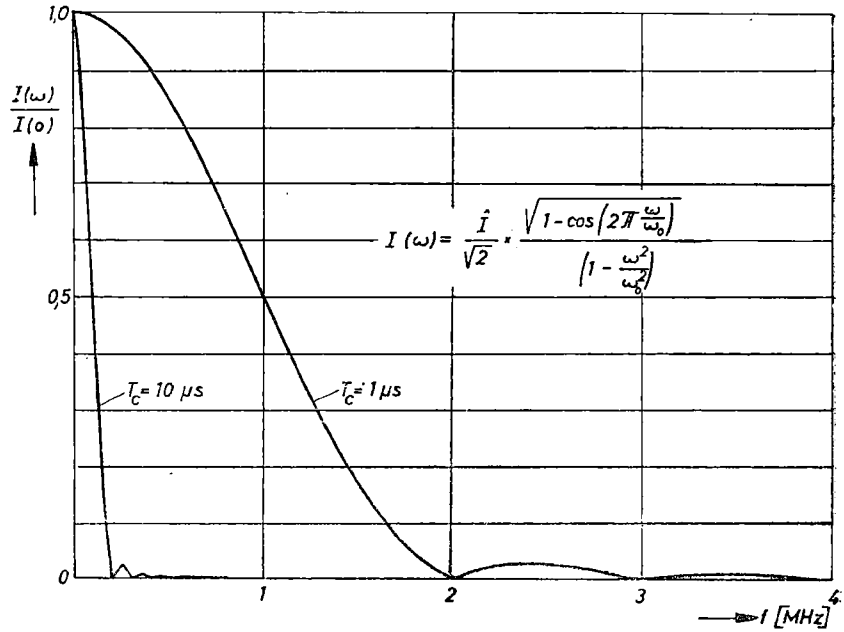


Fig. 5.8. Spectrul de frecvență pentru curentul postarc.

6. Instalații pentru determinarea performanțelor

Pentru a măsura performanțele șunturilor coaxiale și divizoarelor de tensiune, în acord cu criteriile expuse în cap. 2, este necesar să dispunem de surse care să producă fie excitația treaptă fie excitația sinusoidală.

6.1. Producerea excitației treaptă la încercarea șunturilor coaxiale

Mijloacele tehnice necesare producerii excitației treaptă sînt diferite, în funcție de grosimea peretelui cilindrului rezistiv al șuntului. Pentru pereți relativ subțiri, de ordinul 0,05...0,5 mm se utilizează generatorul de oscilații dreptunghiulare realizat dintr-un cablu coaxial, cu pierderi reduse, încărcat la o tensiune 1...10 kV, și care se scurtcircuitează la o extremitate, cealaltă rămînînd liberă, ca în fig. 6.1, *a*. La producerea scurtcircuitului, curentul este dat de relația

$$I = \frac{U}{Z_c}. \tag{6.1}$$

unde U este tensiunea de încărcare prealabilă a cablului, iar Z_c este impedanța sa caracteristică. Prin scurtcircuitare, tensiunea la extremitatea scurtcircuitată capătă brusc valoarea zero, deci apare, la această extremitate, tensiunea $-U$, care se propagă cu viteza $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ către extremitatea liberă; aici se reflectă conservîndu-și polaritatea și se propagă către extremitatea scurtcircuitată, unde se reflectă cu schimbarea polarității ș.a.m.d. Durata necesară propagării undei de polaritate $-U$ de la extremitatea scurtcircuitată la cea liberă și înapoi la cea scurtcircuitată este

$$\tau = \frac{2l}{v}. \tag{6.2}$$

După această durată, curentul își schimbă sensul odată cu schimbarea polarității tensiunii reflectate. Se produce astfel un tren de oscilații rectangulare de curent ca în fig. 6.1, *b*. Teoretic, în cazul unui cablu fără pierderi, oscilațiile își conservă amplitudinea, fără a fi necesar a se introduce, din exterior, energie suplimentară.

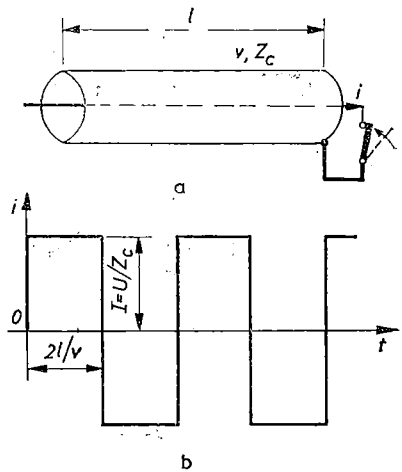


Fig. 6.1. Producerea oscilațiilor rectangulare de curent:
a — cablul încărcat care se scurtcircuitează la o extremitate; *b* — diagrama curentului.

În fig. 6.2 se prezintă schema electrică a instalației care folosește principiul descris al generatorului de curent rectangular. Cablul coaxial *1* este de tipul celui utilizat în televiziune, cu izolație de polietilenă. Lungimea cablului utilizat depinde de valoarea timpului de răspuns al șuntului încercat și poate fi cuprinsă între 5 și 100 m.

Condiția de folosire a acestei metode de determinare a timpului de răspuns este ca pe durata $\tau = 2l/v$ răspunsul să se stabilizeze în amplitudine. Comutatorul *2* se poate realiza cu ajutorul unui releu cu contacte muiate în mercur, tipul CLARE [49], folosit curent în construcția centralelor telefonice. Un asemenea releu comută curenți de ordinul 1...5 A fără vibrații mecanice, deci fără arc electric. La încercarea șunturilor coaxiale, cu pereți mai groși ai tubului rezistiv și deci cu valori mai mici ale rezistențelor, este necesar a se folosi un curent mai intens, de 50...100 A. În acest caz, comutația se realizează cu ajutorul unui eclator, care poate fi în aer la presiunea atmosferică, în care caz timpul propriu de creștere este de 5...10 ns,

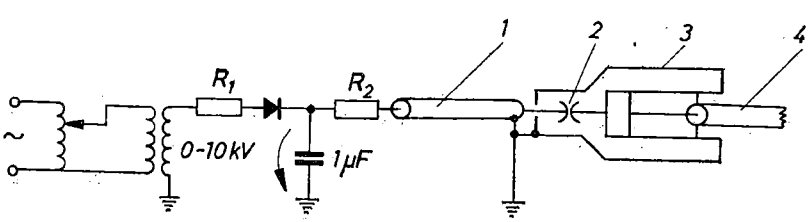
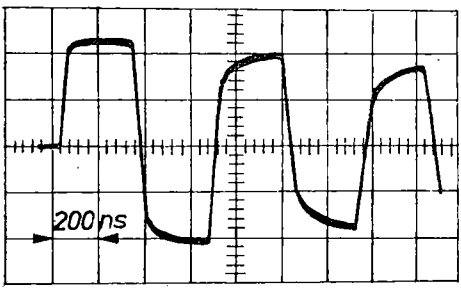
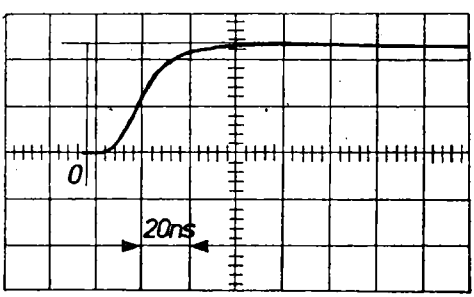


Fig. 6.2. Schema electrică a instalației care produce excitația treaptă de curent. Se folosește un cablu coaxial.

sau în azot sub presiunea de pînă la 8 at, cînd timpul propriu de creştere este de cîteva nanosecunde. Rezistenţa R_1 serveşte la limitarea curentului de încărcare a condensatorului tampon, cu capacitatea de aproximativ 1 μF, iar rezistenţa $R_2 \approx 5$ M Ω serveşte la menţinerea practic în gol a extremităţii cablului coaxial. Eclatorul *2*, şuntul *3* şi cablul *4* de măsurare sînt toate montate coaxial.



a



b

Fig. 6.3. Oscilograme obţinute cu schema din fig. 6.2:
a — unde de curent rectangular; *b* — prima treaptă.

Cu montajul schiţat în fig. 6.2 s-a obţinut oscilograma undelor de curent rectangular ca în fig. 6.3, *a*, la încercarea unui şunt coaxial cu rezistenţa de 2,02 m Ω. Se remarcă faptul că rezistenţa şuntului este sensibil mai mică decît valoarea impedanţei caracteristice (75 Ω) a cablului coaxial *1*, astfel încît relaţia (6.1) poate fi folosită cu suficientă aproximaţie. În oscilogramă se mai constată atenuarea în timp a semnalului de curent. În evaluarea timpului de răspuns trebuie reţinută prima treaptă de curent, la care amortizarea este minimă. Această evaluare se face prin dilatarea convenabilă a timpului ca în fig. 6.3, *b*, unde o diviziune echivalează cu 20 ns faţă de fig. 6.3, *a*, în care o diviziune echivalează cu 200 ns. Timpul de răspuns astfel măsurat pe oscilograma din fig. 6.3, *b* este de 25 ns.

În cazul şunturilor coaxiale cu valori de rezistenţă extrem de mici, spre exemplu $4 \cdot 10^{-5}$ Ω, schema de încercare din fig. 6.2 nu mai este potrivită, deoarece impune lungimi de cablu coaxial de aproximativ 1 km. O instalaţie de încercare compactă este prezentată în fig. 6.4, în care, locul cablului coaxial scurtcircuitat la o extremitate este preluat de un condensator *1*, în construcţie coaxială, de capacitate suficient de mare, spre exemplu 4...5 μF, care se descarcă pe

şuntul coaxial *3*, prin intermediul rezistenţei R_3, cu ajutorul eclatorului *2*. În acest caz, excitaţia nu mai este o treaptă de curent, ci exponenţiala de descărcare a unui condensator, de forma

$$i = I\ e^{-t/T}, \tag{6.3}$$

în care curentul în momentul $t = 0$ este $I = U/R_3$. Este de la sine înţeles că această exponenţială se poate asimila cu o treaptă de

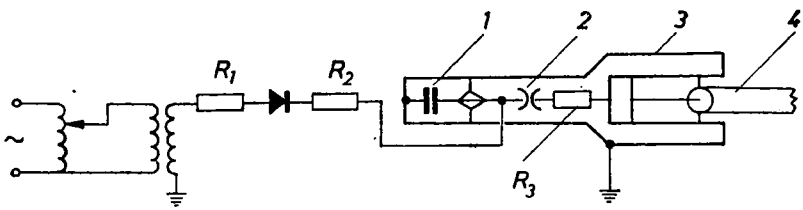


Fig. 6.4. Schema electrică a instalaţiei de produs excitaţie exponenţială. Se foloseşte un condensator coaxial.

curent, cu condiţia ca timpul de răspuns al şuntului încercat să fie sensibil mai mic decît constanta de timp $T = R_2C$ a exponenţialei din relaţia (6.3).

6.2. Producerea excitaţiei treaptă la încercarea divizoarelor de tensiune

La determinarea timpului de răspuns al unui divizor de tensiune, este util ca excitaţia treaptă de tensiune să aibă o amplitudine suficient de mare pentru a verifica divizorul în condiţii cît mai apropiate de cele din funcţionarea normală. În fig. 6.5, *a* se prezintă schema electrică cu ajutorul căreia s-au obţinut răspunsurile din fig. 4.40. Condensatorul C cu o capacitate de 0,15 μF este încărcat la o tensiune de aproximativ 100 kV. Prin amorsarea cu triger a eclatorului E_{c1}, condensatorul C se descarcă pe rezistenţa R_2 cu o valoare de 20 kΩ. Constanta de timp a circuitului de descărcare este deci suficient de mare, 3 ms, în raport cu timpul de răspuns, cîteva zeci de ns, al divizorului. După cîteva μs de la iniţierea descărcării, eclatorul E_{c2} autoamorsează şi în acest mod divizorul este excitat cu o treaptă de tensiune. Eclatorul E_{c2} poate fi realizat într-un recipient cu azot, la presiunea de cîteva atmosfere, sau poate fi realizat

cu electrozi de fier amplasați într-un recipient de ulei [1]. Utilizarea uleiului permite a se regla distanța între electrozii eclatorului E_{c2} la cîțiva mm. Folosirea fierului ca material pentru electrozi este utilă pentru a diminua timpul de formare a canalului de străpungere a distanței disruptive. Divizorul se așază în poziția de funcționare,

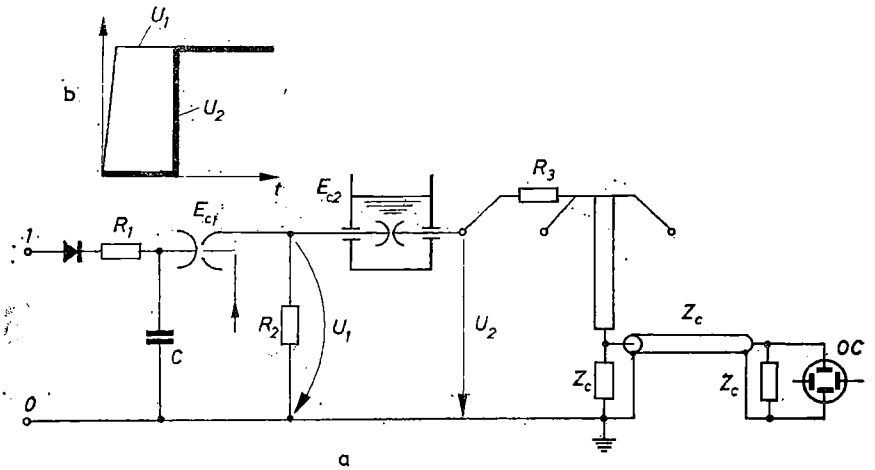


Fig. 6.5. Instalație pentru produs treapta de tensiune:
a — schema electrică; *b* — diagramele de tensiune.

iar în circuitul de excitație este introdusă rezistența de amortizare R_3. O atenție deosebită se acordă pămîntului care este comun, sub forma unei plăci de cupru sau aluminiu și legat într-un singur punct la priza de pămînt. Oscilograful primește potențialul zero prin intermediul ecranului cablului de măsură. În fig. 6.5, *b* se prezintă diagramele pentru tensiunea U_1 de descărcare a condensatorului C și tensiunea U_2 de excitare a divizorului de tensiune. La realizarea schemei de încercare se respectă condițiile de montaj specifice [10].

6.3. Determinarea caracteristicii de frecvență a divizoarelor de tensiune

Caracteristica de frecvență cuprinde atît răspunsul în amplitudine, cît și cel în fază. Echipamentul necesar determinării caracteristicii de frecvență în amplitudine este schițat în fig. 6.6. Generatorul de semnal sinusoidal *1*, echipat cu un voltmetru la ieșire, produce un

semnal sinusoidal care se aplică divizorului *2*. Semnalul de ieşire din divizor, intră prin intermediul cablului coaxial, în voltmetrul electronic *3*. Cu asemenea instalaţie, pentru frecvenţe discrete cuprinse între 10 kHz şi 1,4 MHz, s-a trasat caracteristica de frecvenţă din fig. 4.43, *a* unui divizor mixt, serie, *RC* cu raport de reducere 4 000. Pentru

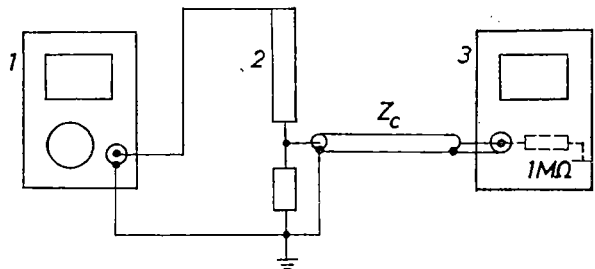


Fig. 6.6. Echipament pentru determinarea caracteristicii de frecvenţă în amplitudine.

fiecare valoare discretă a frecvenţei se menţine constantă amplitudinea tensiunii de intrare în divizor şi se citeşte tensiunea de ieşire.

Pentru a trasa şi caracteristica de frecvenţă a fazei este necesar a se dispune de un osciloscop de tip dual, cu bandă largă, echipat cu amplificator diferenţial [1]. Schema electrică a unei asemenea instalaţii este dată în fig. 6.7. Generatorul de semnal sinusoidal *1*

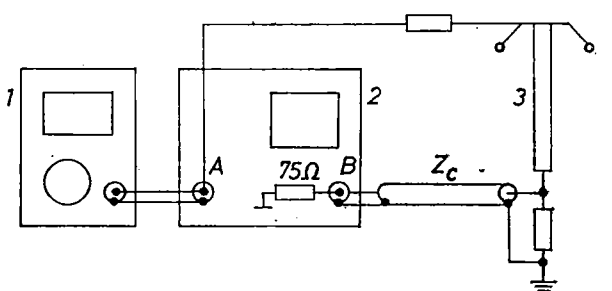


Fig. 6.7. Echipament pentru determinarea caracteristicii de frecvenţă în amplitudine şi fază.

produce un semnal care se aplică atît la intrarea în amplificatorul *A* al osciloscopului *2*, cît şi la intrarea în divizorul de tensiune *3*. Semnalul de ieşire din divizor se aplică la intrarea în amplificatorul *B*. Un asemenea osciloscop, de exemplu Philips PM 3250, cu bandă de frecvenţă de 60 MHz, poate măsura şi afişa valori instantanee pentru cele două mărimi de intrare şi poate de asemenea să efectueze diferenţa instantanee a celor două mărimi.

Pentru a obține defazajul propriu divizorului de tensiune, din valoarea măsurată se scade defazajul produs de cablul coaxial de măsurare

$$\Phi_c(\omega) = \omega l \sqrt{L_0 C_0} \tag{6.4}$$

unde :

l este lungimea cablului de măsurare ;

L_0, C_0 sînt parametrii lineici ai cablului de măsurare.

O posibilitate suplimentară de a crește precizia măsurării experimentale a defazajului între semnalele de intrare și ieșire, o constituie cea de a doua bază de timp a osciloscopului și „lupa de timp" care sînt module curente în structura osciloscoapelor cu bandă largă de frecvență. Raportul de divizare (reducere), adică raportul între semnalul de ieșire și cel de intrare, se determină cu multă ușurință, ținînd seama de calibrarea amplificatoarelor de intrare și de faptul că aceste amplificatoare oferă sensibilități calibrate între 1 mV/div pînă la 5 V/div. Cu alte cuvinte, se poate determina rapoarte de reducere cuprinse între 1/1 și 1/5 000 . . . 1/15 000.

Analizoarele de rețea, de exemplu HP 8407 A, oferă posibilitatea de a înscrie direct, cu ajutorul unui ploter, caracteristica de frecvență în amplitudine și fază. O asemenea înscriere este dată în fig. 2.10 pentru un divizor de tensiune universal, cu raport de reducere 1/100. Caracteristica în amplitudine este dată ca atenuare, iar caracteristica în fază este dată direct în grade. Frecvența de testare este cuprinsă între 0,1 MHz și 10 MHz.

6.4. Determinarea timpului de creștere

Determinarea timpului de creștere se efectuează cu ajutorul unui osciloscop catodic cu bandă largă de frecvență, de exemplu 60 MHz . . . 500 MHz și cu un caroiaj convenabil al ecranului, ca în fig. 6.8. Fenomenul este extins, pe ecran, la maximum, atît ca amplitudine cît și ca durată. Timpul cuprins între 0,1 și 0,9 din amplitudine reprezintă timpul de creștere total T_{crt}, care cuprinde :

T_{cre} — timpul de creștere al eclatorului *2* a montajului din fig. 6.2 ;

T_{crs} — timpul de creștere al șuntului coaxial ;

T_{crc} — timpul de creștere al cablului coaxial ;

T_{cro} — timpul de creștere al osciloscopului catodic.

În principiu ne interesează să determinăm timpul de creştere propriu convertorului, în exemplul ales, al şuntului coaxial. Dacă timpul de creştere al şuntului coaxial este relativ mare faţă de cel

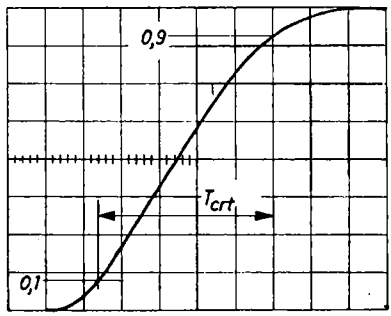


Fig. 6.8. Relativ la determinarea timpului de creştere.

al eclatorului şi al cablului coaxial, în acord cu relaţia (2.67) se poate aproxima timpul de creştere al şuntului

$$T_{crs} = \sqrt{T_{crt}^2 - T_{cro}^2}. \tag{6.6}$$

Timpul de creştere al osciloscopului este dat de constructor. Spre exemplu, acest timp, pentru osciloscopul Philips PM 3250, cu banda de frecvenţă de 60 MHz, este de 7 ns.

7. Cîteva aplicaţii

Şunturile coaxiale şi divizoarele de tensiune îşi găsesc o largă aplicare în instalaţiile electrice de măsurare şi încercări, în care apar mărimi (curenţi şi tensiuni) cu variaţii rapide în timp. În acest sens reprezentative sînt următoarele domenii moderne de aplicaţii:

a) tehnica încercărilor dielectrice;

b) tehnica încercărilor aparatelor de comutaţie de joasă şi înaltă tensiune;

c) tehnica mutatoarelor echipate cu semiconductoare.

Cadrul lucrării de faţă nu îngăduie prezentarea pe larg a acestor aplicaţii, dar prezentarea unor scheme reprezentative este utilă pentru a scoate în evidenţă rolul funcţional al şunturilor coaxiale şi al divizoarelor de tensiune.

7.1. Încercarea la impuls de tensiune a transformatoarelor

Una din încercările dielectrice ce se efectuează asupra transformatoarelor este încercarea la impuls de tensiune, în acord cu standardele de stat [30], şi cu recomandările Comisiei electrotehnice internaţionale privind coordonarea izolaţiei [77]. Încercarea cu impuls de tensiune este destinată a verifica izolaţia transformatoarelor în condiţiile de solicitare în exploatare, după cum urmează:

a) izolaţia principală, faţă de masă şi între faze;

b) izolaţia între spirele unei înfăşurări;

c) izolaţia punctului neutru în cazul în care transformatorul este destinat a funcţiona cu neutrul izolat.

În fig. 7.1 se prezintă schema electrică a încercării la impuls a unui transformator, în scopul verificării izolaţiei principale şi izolaţiei între spire. Generatorul de impuls de tensiune este reprezentat de condensatorul C, eclatorul E_g şi rezistenţa de front R_1. Eclatorul E_t serveşte la tăierea undei, iar divizorul de tensiune D_t, la înregistrarea

tensiunii de încercare, care trebuie să menţină o durată minimă a semiamplitudinii [30]. Transformatorul T este pregătit pentru a fi încercat în felul următor [1] : unda de impuls se aplică fazei *1*, din primarul transformatorului; fazele *2* şi *3* se conectează la pământ

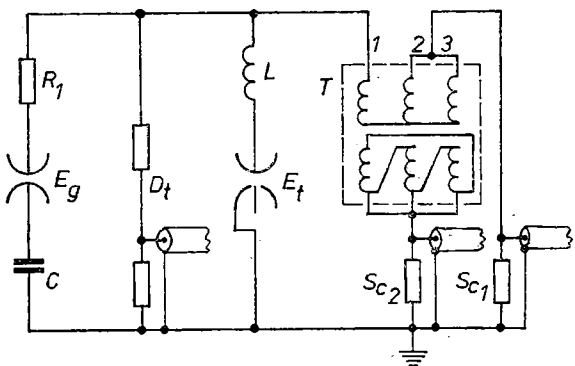


Fig. 7.1. Folosirea şunturilor coaxiale şi a unui divizor de tensiune, la încercarea cu impuls de tensiune a unui transformator.

prin intermediul şuntului coaxial S_{c1}. Înfăşurarea secundară, în triunghi, este scurtcircuitată şi conectată la pământ prin intermediul şuntului coaxial S_{c2}. Se înregistrează curentul din înfăşurarea căreia i se aplică tensiunea de impuls, adică curentul din faza *1* care se ramifică în fazele *2* şi *3*. Se mai înregistrează curentul capacitiv al capacităţii formată de înfăşurarea primară şi cea secundară. Curentul acesta, măsurat de şuntul coaxial S_{c2}, este indicator pentru prezenţa unui scurtcircuit între spirele fazei *1*. Tehnica încercării constă în a aplica, în prima etapă, un impuls de tensiune redusă — aproximativ 50% din tensiunea normală de încercare — şi a se înregistra curentul capacitiv. Oscilograma astfel obţinută se numeşte normogramă.

În etapa a doua se aplică tensiunea de încercare plină şi se înregistrează curentul capacitiv. Prin compararea oscilogramei curentului capacitiv de tensiune plină cu normograma obţinută mai înainte se constată absenţa sau producerea defectului de scurtcircuit între spire. Dacă oscilograma nu diferă de normogramă rezultă

[1] Numai în cazul conexiunii stea cu neutrul izolat este valabilă schema din fig. 7.1.

că transformatorul nu a suferit nici o avarie în timpul încercării. Dacă dimpotrivă, există diferenţe între oscilogramă şi normogramă, rezultă că a apărut o deteriorare a izolaţiei între spire.

În fig. 7.2 se prezintă normograma şi oscilogramele cu defect, care apar la 1,3 μs ; 1,2 μs ; 1,6 μs. În aceste oscilograme se constată că pînă la apariţia defectului, curentul rămîne identic cu cel din normogramă, iar după apariţia defectului, curentul capacitiv ia forme sensibil diferite. Se mai observă variaţiile rapide ale curentului capacitiv şi de aici necesitatea de a folosi şunturi coaxiale cu banda de frecvenţă de ordinul 10 MHz. De asemenea, măsurarea undei de tensiune tăiate se realizează cu divizorul de tensiune D_t, cu banda de frecvenţă de aproximativ 1 MHz, după cum rezultă din fig. 5.6.

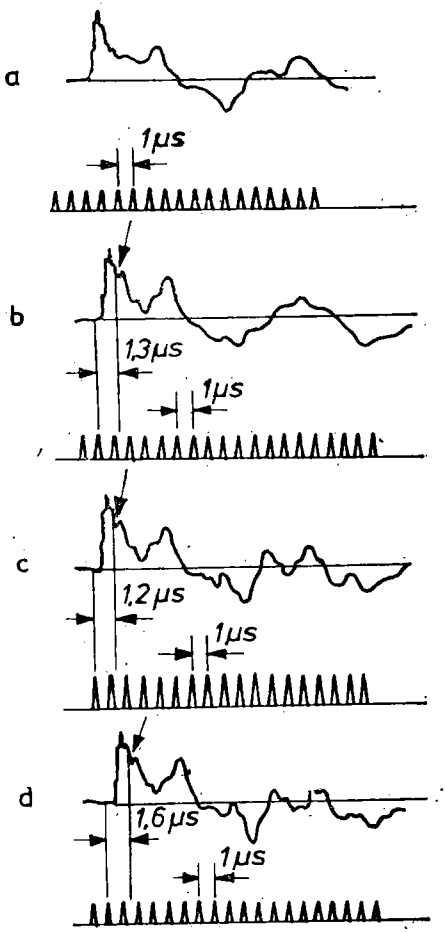


Fig. 7.2. Detectarea unui defect de izolaţie între spire :

a — normograma; *b*, *c*, *d* — oscilograme cu defect.

7.2. Măsurarea tensiunii de arc electric, a tensiunii de restabilire şi a curentului postarc

Un alt caz reprezentativ, în care se cere ca şunturile coaxiale şi divizoarele de tensiune să aibă performanţe superioare, este cel al încercării capacităţii de deconectare a unui întreruptor de putere de joasă sau înaltă tensiune, în curent alternativ. În adevăr, reuşita unei întreruperi depinde de procesele fizice ce au loc în jurul trecerii prin zero a curentului de scurtcircuit, în

etapa în care contactele aparatului s-au separat, iar în camera de stingere există un arc electric [32]. Fără a intra în detalii specifice, este suficient să se menţioneze că în aceste condiţii este necesar să se măsoare :

a) curentul intens, cu cîteva microsecunde înainte de trecerea naturală prin valoarea zero ;

b) tensiunea de arc electric ;

c) curentul postarc, cu cîteva ordine de mărime mai mic decît curentul de scurtcircuit ;

d) tensiunea de restabilire la bornele întreruptorului, în cazul întreruperii reuşite.

O schemă electrică cu ajutorul căreia se măsoară mărimile menţionate, cu ajutorul şunturilor şi al divizoarelor de tensiune, trebuie să satisfacă condiţia de a elimina interferenţa între circuitul de curent intens şi circuitele utilizate la măsurarea tensiunilor. O asemenea schemă numită *montaj diferenţial* [59] este arătată în fig. 7.3.

În schema 7.3, *a* se prezintă principiul de măsurare. Divizorul de tensiune D_{t1} măsoară, pe conturul A, B, C, A, tensiunea

$$u_A = u + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{7.1}$$

unde : u_A este tensiunea bornei A faţă de masă (punctul c) ;

u — tensiunea la bornele întreruptorului ;

$\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ — tensiunea indusă în bucla de măsurare.

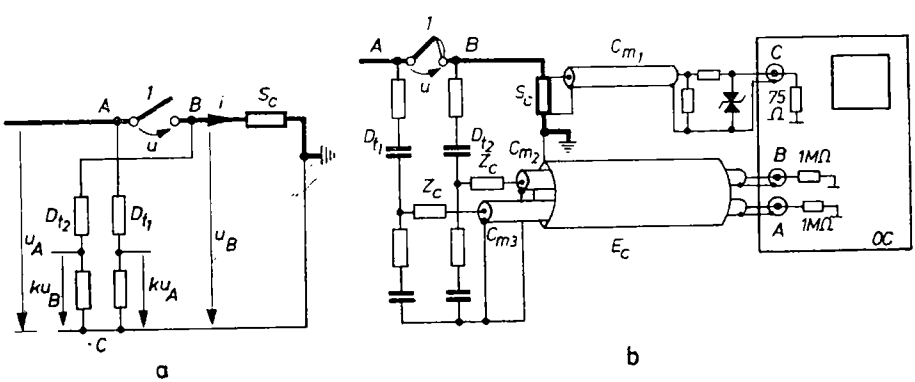


Fig. 7.3. Înregistrarea mărimilor la trecerea curentului, într-un întreruptor, prin valoarea zero :

a — schema de principiu ; *b* — schema de conexiuni.

Divizorul de tensiune D_{t2} măsoară, pe conturul B, C, B, tensiunea

$$u_B = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{7.2}$$

Semnalele captate pe braţele de joasă tensiune ale celor două divizoare sînt kU_A şi kU_B, unde k este raportul de reducere al celor două divizoare de tensiune. Prin efectuarea diferenţei

$$ku_A - ku_B = k\left(u + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right) = ku, \tag{7.3}$$

se constată că se obţine un semnal proporţional cu tensiunea la bornele întreruptorului şi că se elimină tensiunea indusă în bucla de măsurare.

În schema 7.3, *b* se prezintă schema de conexiuni corespunzătoare montajului diferenţial. Cele două semnale ku_A şi ku_B se introduc în amplificatorul diferenţial al osciloscopului OC, în care se efectuează diferenţa dată de relaţia (7.3). Cablurile de măsurare C_{m2} şi C_{m3}, dublu ecranate, sînt introduse în interiorul ecranului E_c. Divizoarele de tensiune D_{t1} şi D_{t2}, de construcţie identică, sînt de tipul mixt, serie, RC. Măsurarea curentului de scurtcircuit şi a curentului post-arc se realizează cu şuntul coaxial S_c. Cum între intensităţile celor doi curenţi există diferenţe de cîteva ordine de mărime, limitarea semnalului transferat de cablul de măsurare C_{m1} se obţine cu ajutorul a două diode Zenner montate antiparalel la intrarea C a osciloscopului.

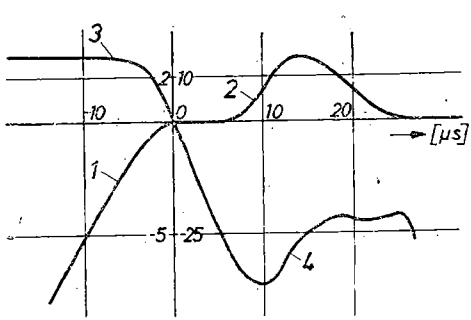


Fig. 7.4. Oscilograma la întreruperea curentului într-un întreruptor de înaltă tensiune.

Utilizarea montajului diferenţial necesită o prealabilă echilibrare a celor două bucle de măsurare, în care sînt introduse divizoarele de tensiune. Astfel, dacă întreruptorul *1* este închis şi prin el se trece curent intens, amplasarea geometrică a celor două divizoare de tensiune trebuie astfel făcută încît amplificatorul diferenţial al osciloscopului să scoată o tensiune nulă.

În fig. 7.4 se prezintă [58] oscilograma curentului intens

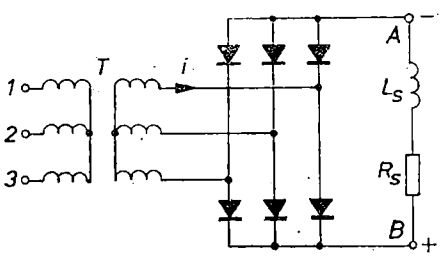
1 cu cîteva zeci de microsecunde înainte de trecerea prin zero a curentului postarc termic *2*, a tensiunii de arc *3* şi a tensiunii de restabilire *4*, mărimi ce se pot măsura cu montajul diferenţial prezentat în fig. 7.3. Se remarcă, în acord cu analiza Fourier din tabelul 5.1, poziţia 7, şi fig. 5.8, că banda de frecvenţă necesară şuntului coaxial, pentru a măsura curentul postarc, este de aproximativ 0,3 MHz.

7.3. Măsurarea curenţilor în circuitele mutatoarelor

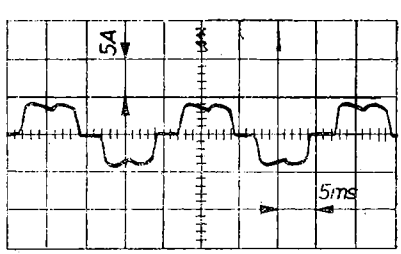
În circuitele mutatoarelor cu comutaţie liberă şi cu comutaţie forţată, variaţiile de curent sînt deosebit de rapide şi se situează de multe ori la limita pantei admise de ventil. În cazul ventilelor semiconductoare, această pantă variază între 50 şi 800 A/μs. Ventilele speciale pot atinge pante de 4 000 A/μs. În aceste condiţii, măsurarea curenţilor nu poate fi efectuată decît utilizînd şunturi coaxiale, cu timp mic de răspuns. Astfel, este posibil să se evalueze exact durata unei comutaţii şi să se folosească ventilele semiconductoare la parametrii garantaţi.

Formele curenţilor ce apar în circuitele mutatoarelor pot fi extrem de variate, în funcţie de structura schemei mutatorului.

În fig. 7.5, *a* este dată schema de conexiuni, de curenţi tari a unui redresor trifazat în punte Graetz. Sursa de curent alternativ se aplică bornelor *1*, *2*, *3* ale transformatorului *T*. Tensiunea continuă se obţine la bornele *A* şi *B* ale sarcinii formată din inductivitatea L_s şi rezistenţa R_s. Oscilograma curentului *i* în secundarul transformatorului este dată în fig. 7.5, *b*. Conţinutul de armonice real al acestui curent este uşor diferit de conţinutul undei de curent idealizate cu durata unghiulară 2 π/3.



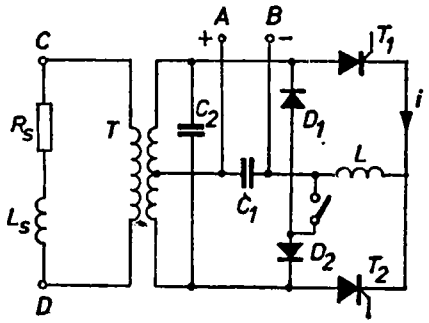
a



b

Fig. 7.5. Măsurarea curentului redresat: *a* – schema electrică; *b* – oscilograma curentului.

În fig. 7.6 este dată [65] schema electrică a unui invertor monofazat cu comutaţie forţată. Tensiunea alternativă se obţine la bornele C, D, ale sarcinii formată din rezistenţe R_s şi inductivitatea L_a. Oscilograma curentului i, care trece prin tiristorul T_1 se vede în fig. 7.6, *b*. Se constată că după o conducţie de 5 ms, cu-



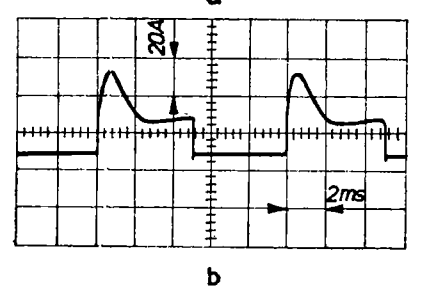
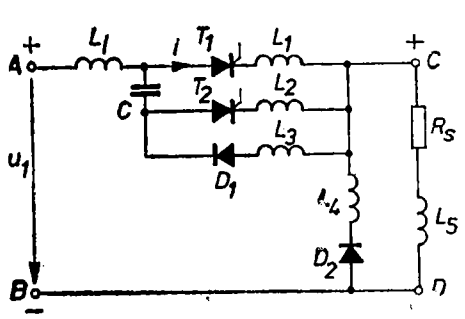


Fig. 7.6. Măsurarea curentului în ventilul unui invertor :
a — schema electrică; *b* — oscilograma curentului.



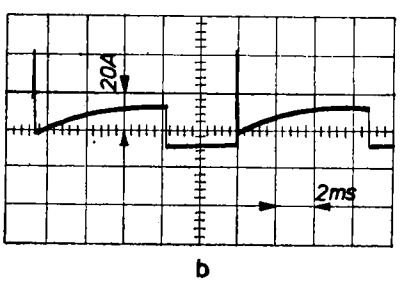


Fig. 7.7. Măsurarea curentului în ventilul unui variator de tensiune continuă :
a — schema electrică; *b* — oscilograma curentului.

rentul care trece prin tiristor scade brusc la valoarea zero, în timpul necesar deionizării tiristorului. De asemenea, stabilirea conducţiei se realizează rapid, în funcţie de constanta de timp a circuitului.

În fig. 7.7, *a* se prezintă schema de curenţi tari ai unui variator de tensiune continuă. Tensiunea continuă este aplicată la bornele A, B, iar tensiunea continuă variabilă se obţine la bornele C, D ale sarcinii formate din rezistenţa R_s şi inductivitatea L_s. Oscilograma curentului i în tiristorul T_1, este dată în fig. 7.7, *b*. Se observă că vîrful iniţial de curent are o durată mai mică de 0,2 ms. Măsurarea acestui vîrf de curent, în condiţii de suficientă aproximaţie, este posibilă numai cu ajutorul unui şunt coaxial, cu o bandă de frecvenţă de minimum 100 kHz.

8. Interferențe în circuitul de măsurare

Nivelul semnalelor utile, provenite de la șunturi sau divizoare de tensiune, este uneori comparabil cu nivelul perturbator într-un laborator de încercări. Astfel, la măsurarea unui curent de 30 kA_{ef}, semnalul efectiv poate fi 10 V_{ef}, iar curentul în cablul de măsurare numai de 200 mA. La efectuarea unei încercări cu tensiune de impuls de 1,5 MV, semnalul util este aproximativ 100 V. Este evident faptul că, măsurările se efectuează în vecinătatea și sub influența unor cîmpuri electromagnetice puternice. Aceste aspecte devin încă mai critice în operațiunea de etalonare a șunturilor și divizoarelor de tensiune, situații în care semnalele de excitație sînt reduse,iar nivelul semnalului de ieșire rezultă extrem de mic. Astfel, la excitarea unui șunt coaxial, cu o rezistență de $4 \cdot 10^{-5}$ Ω, cu un curent de 100 kA, rezultă un semnal de ieșire de numai 4 mV. Un semnal util de această amplitudine poate fi interferat cu multă ușurință de cîmpuri electromagnetice de proveniență comună.

Sediul interferenței îl constituie cablul coaxial, ce transmite semnalul util de la convertor (șunt sau divizor de tensiune) la osciloscraful catodic, și osciloscraful catodic cu conexiunile lui de alimentare și cu conductorul de protecție care leagă carcasa metalică a osciloscrafului la pămînt.

8.1. Detectarea unei interferențe

Pentru a detecta apariția unei interferențe la efectuarea unei încercări (ne referim la fig. 4.1, de exemplu) se efectuează două verificări și anume :

a) cablului coaxial *4* i se desface legătura conductorului central la divizor, dar se conservă legătura ecranului la pămînt. În acest mod cablul coaxial rămîne în gol la extremitatea spre divizorul de tensiune ;

b) conductorul central al cablului coaxial spre divizorul de tensiune se conectează la ecran, care rămîne conectat la pămînt.

Se realizează astfel scurtcircuitarea extremității spre divizorul de tensiune.

În ambele situații, a și *b*, se procedează la declanșarea fenomenului cercetat și în ambele situații pe ecranul osciloscopului nu apare semnal de interferență, ci numai linia bazei de timp, dacă acest semnal nu există. Dacă dimpotrivă, există semnal de interferență, acesta va apărea pe ecran sub forma unor oscilații, mai mult sau mai puțin neregulate, în jurul liniei de zero.

8.2. Efectul trecerii unui curent de interferență prin ecranul cablului coaxial

În fig. 8.1 este schițat un cablu coaxial de lungime *l*, prin ecranul căruia se injectează curentul sinusoidal $\underline{I}(\omega)$. Cablul fiind scurtcircuitat la o extremitate, se constată că la cealaltă extremitate, între conductorul central conectat la borna *a* și ecran, conectat la borna *b*, se măsoară tensiunea $\underline{U}(\omega)$. Se poate defini [42, 62, 64] astfel o impedanță de cuplaj $\underline{Z}(\omega)$ a cablului coaxial cu relația

$$\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{U}(\omega)}{\underline{I}(\omega) \cdot l}. \tag{8.1}$$

Impedanța de cuplaj a cablului coaxial ia valori din ce în ce mai mici pe măsură ce frecvența curentului injectat crește, ceea ce se explică prin accentuarea efectului pelicular odată cu creșterea frecvenței. Măsurarea trebuie efectuată la o lungime *l* a cablului sensibil mai mică decît un sfert din lungimea de undă proprie, adică pentru $l \ll \lambda/4$. Se constată astfel că, trecerea unui curent de interferență prin ecranul cablului conduce la apariția unei tensiuni de interferență în circuitul de măsurare.

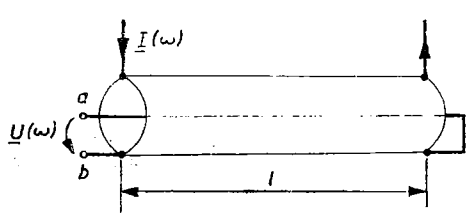


Fig. 8.1. Relativ la impedanța de cuplaj a unui cablu coaxial.

În mod similar se poate defini o impedanță de cuplaj a osciloscopului catodic, adică trecerea unui curent de interferență prin carcasa metalică a osciloscopului poate conduce la apariția unui semnal perturbator în circuitul de măsurare.

Trecerea unui curent de interferență prin ecranul cablului de măsurare sau prin carcasa osciloscopului catodic poate avea multe cauze. Acestea se pot urmări în fig. 8.2, care reprezintă schema

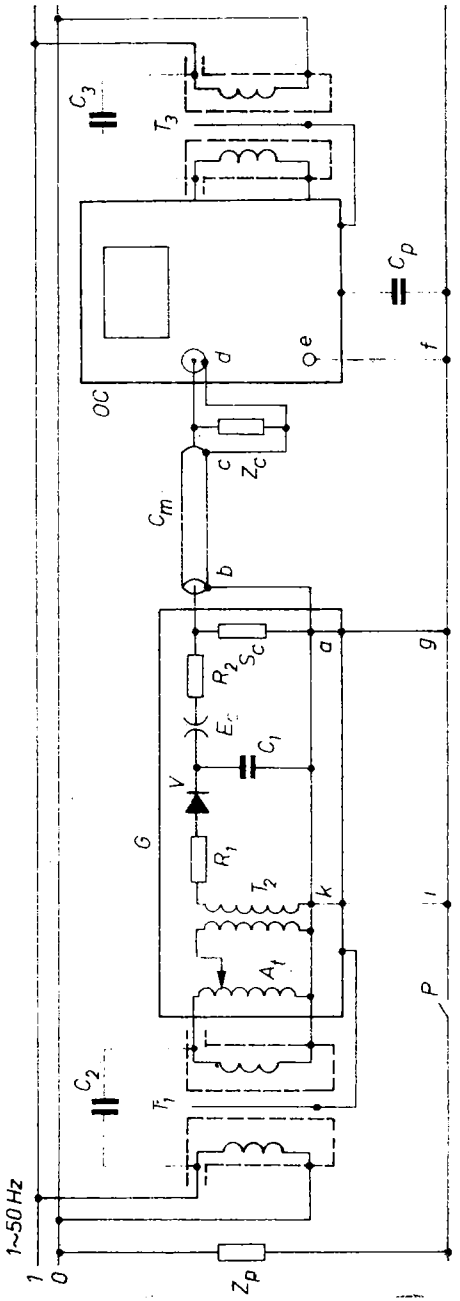


Fig. 8.2. Schema electrică tip pentru cercetarea interferenței.

electrică de principiu folosită la determinarea timpului de răspuns al unui șunt coaxial. În carcasa metalică G sînt adăpostite autotransformatorul At, transformatorul T_2, dioda V, rezistențele limitatoare R_1 și R_2, condensatorul C_1, care se descarcă pe șuntul coaxial S_c prin intermediul eclatorului E_c. Acest complex este alimentat de la rețeaua de curent alternativ prin intermediul transformatorului de izolare T_1. Osilograful catodic OC este și el alimentat prin transformatorul de izolare T_3. Semnalul util captat de pe șuntul Sc este transmis osilografului cu ajutorul cablului coaxial cu impedanța caracteristică Z_c. Cauzele menționate pot fi următoarele:

a) tensiune electromotoare indusă în bucla a, b, c, d,e, f, g realizată prin legarea la conductorul de protecție P, atît a carcasei G cît și a osilografului OC;

b) trecerea unui curent de scurgere, provenit de la alți consumatori, sau chiar trecerea curentului cauzat de o capacitate parazită C_p a osciloscopului, cînd acesta este neconectat la conductorul de protecție, produce o cădere de tensiune între punctele f și g, care determină o circulație de curent prin ecranul cablului coaxial;

c) traversarea transformatoarelor de alimentare T_1 și T_3 de către curenți capacitivi, ca urmare a capacității existente între primarul și secundarul celor două transformatoare;

b) legarea la pămînt nepotrivită; dacă în loc ca legarea la pămînt a sursei de curent să se efectueze în punctul a, s-ar face în punctul k, cu conductorul $k-i$, între punctele a și k ar apărea, la trecerea curentului de descărcare a condensatorului C_1, o cădere de tensiune care determină trecerea unui curent prin ecranul cablului coaxial și prin carcasa osilografului catodic.

În afară de cauzele menționate mai este necesar a se lua în considerare insuficienta ecranare a osciloscopului, astfel încît cîmpul electromagnetic produs de descărcarea condensatorului C_1 pătrunde direct în sistemul de deflecție verticală a osciloscopului catodic. De asemenea, prezența excentricităților pronunțate în construcția cablului coaxial, ca și o incorectă tratare a mufelor terminale ale cablului, pot constitui cauze suplimentare de interferență.

8.3. Metode pentru eliminarea interferenței

Pentru fiecare montaj în parte este necesar a se studia schema electrică după modelul indicat în fig. 8.2. Metodele de eliminare a interferenței sînt următoarele:

a) anularea legăturii la pămînt $e-f$, chiar dacă osilograful are conductor de protecție inclus în fișa de conexiune, de tipul Schuko;

această măsură întrerupe curentul de conducție prin ecran și osciloграf;

b) folosirea unui conductor cu două sau trei ecrane suprapuse. Ultimul ecran poate fi constituit din tub metalic flexibil. Astfel, curentul de interferență se va scurge prin ecranul exterior, iar semnalul util rămîne neinfluențat. În fig. 8.3, *a* se prezintă răspunsul tranzitoriu al unui șunt coaxial de 2,02 m Ω, încercat cu schema din fig. 6.2, în care cablul coaxial este simplu ecranat.

În fig. 8.3, *b* se prezintă același răspuns obținut cu un cablu coaxial dublu ecranat.

c. Utilizarea transformatoarelor ecranate. Ecranarea se efectuează după cum se arată în fig. 8.2 la transformatoarele T_1 și T_3 după o tehnologie complexă. Se ecranează fiecare înfășurare în parte, iar una din cele două extremități se conectează la ecran. Prin această conexiune se reduce considerabil capacitatea parazită între înfășurare și ecran. Miezul magnetic este izolat față de ecranele înfășurărilor. Procedînd în acest mod, capacitatea normală de circa 2000—5000 pF, care există la un transformator neecranat, se reduce la o fracțiune de pF [15].

d. Conectarea corectă a sursei de curent intens, adică în punctul de legătură cu cablul coaxial;

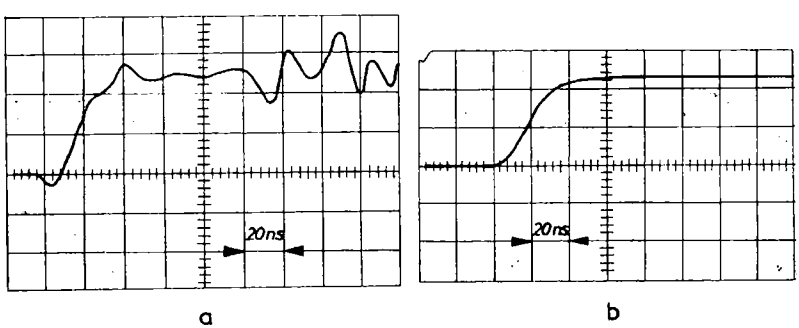


Fig. 8.3. Oscilograma tip pentru eliminarea interferenței:
a — cu cablul coaxial simplu ecranat; *b* — cu cablul coaxial dublu ecranat.

e) extragerea osciloграfului catodic de sub acțiunea directă a cîmpului electromagnetic, prin așezarea lui la o distanță mai mare de sursa de unde electromagnetice;

f) ecranarea osciloграfului parțial, adică pe cinci fețe ale unui paralelipiped, sau total într-o cabină special amenajată.

Anexa 1

Deducerea relației (2.17). Se caută funcția de transfer a sistemului de corecție care are răspunsul, la excitația treaptă, de forma rampei, adică de forma

$$x_{ce}(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau} & \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant \tau; \\ 1 & \text{pentru } t > \tau. \end{cases}$$

Transformata Laplace a acestei funcții este

$$\mathcal{X}_{ce}(p) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} e^{-pt}\, t\, dt + \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt}\, dt. \qquad (A.1.1)$$

Cum $\int x e^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{a^2}\right)$, cu $a = -p$; $x = t$, rezultă:

$$\mathcal{X}_{ce}(p) = \frac{1}{\tau}\left[e^{-pt}\left(-\frac{t}{p} - \frac{1}{p^2}\right)\right]_0^{\tau} - \left[\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_{\tau}^{\infty} = \frac{1 - e^{-p\tau}}{\tau p^2}. \qquad (A.1.2)$$

Transformata Laplace a semnalului de intrare treaptă unitară fiind $1/p$, rezultă funcția de transfer de corecție

$$\mathcal{K}_c(p) = \frac{1 - e^{-p\tau}}{\tau p}. \qquad (2.17)$$

Timpul de răspuns corespunzător funcției de transfer (2.17) se calculează cu relația (2.9) și se obține $T_{rc} = \tau/2$.

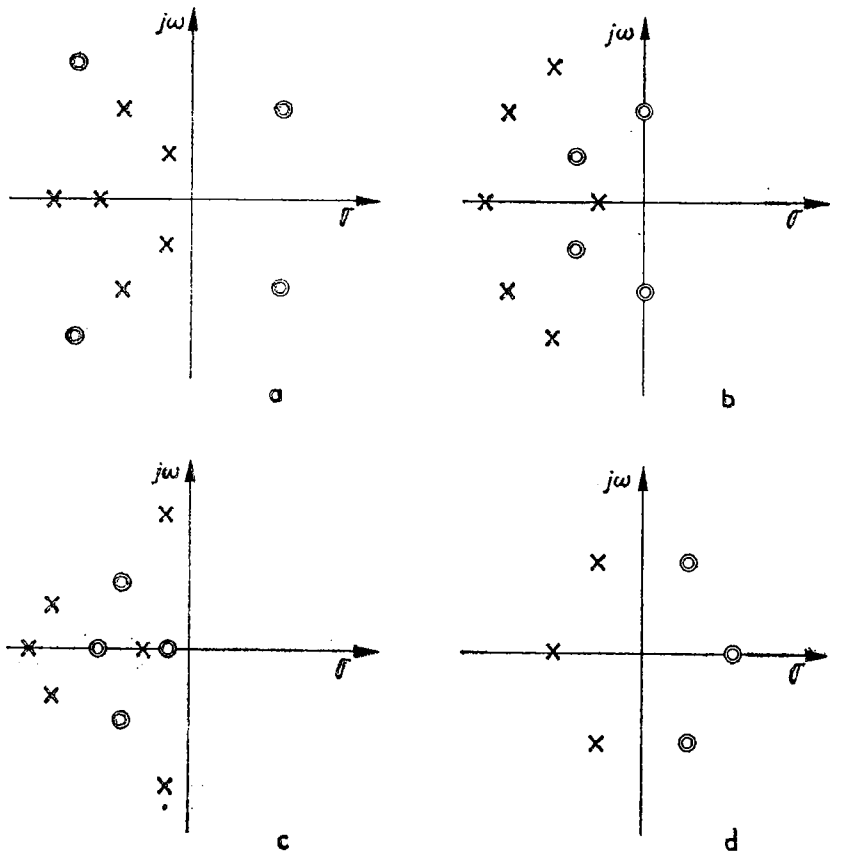
Anexa 2

Clasificarea funcțiilor de transfer după poziția zerourilor și a polilor în planul complex [68]. O funcție $\mathcal{H}(p)$, scrisă ca în relația (2.31), ca să descrie comportarea dinamică a sistemului este necesar să îndeplinească următoarele condiții:

1) $\mathcal{H}(p)$ să fie o funcție reală și rațională de p, adică să poată fi scrisă, ca în relația 2.31, sub forma raportului a două polinoame cu coeficienți reali.

2) $\mathcal{H}(p)$ să fie un polinom Hurwitz, adică să nu conţină poli în semiplanul drept nici la infinit; $q \leqslant k$ în (2.31).

Pentru ca sistemele (reţelele) să fie realizabile există, fiind îndeplinite condiţiile 1) şi 2) următoarele variante, reprezentate în fig. A.2.1.



A.2.1. Referitor la clasificarea sistemelor lineare după polii şi zerourile funcţiei de trausfer.

a) sistem general; cu zerouri şi în semiplanul drept;

b) sistem cu fază minimă: nu are zerouri în semiplanul drept;

c) sistem cu fază minimă compensabil sau reversibil: nu are zerouri în partea dreaptă a semiplanului şi nici pe axa jω;

d) sistem trece tot: zerourile sînt simetrice, în raport cu axa jω, faţă de poli.

Anexa 3

Deducerea relației (2.58). Din lucrările de analiză și sinteza rețelelor [72], răspunsul la excitația treaptă a unei rețele se obține cu relația

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t)\,\mathrm{d}t, \tag{A.3.1}$$

unde $g(t)$ este funcția pondere normată, care rezultă a fi transformata Fourier inversă a caracteristicii de frecvență $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$, adică

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{G}(\mathrm{j}\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega, \tag{A.3.2}$$

relație în care $\underline{G}(\mathrm{j}\omega)$ are expresia din relația (2.33). Se obține astfel

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t + \varphi(\omega)]}\cdot \mathrm{d}\omega. \tag{A.3.3}$$

Prin utilizarea teoremei lui Euler se obține

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\cos\left[\omega t + \varphi(\omega)\right]\mathrm{d}\omega + \frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\sin[\omega t + \varphi(\omega)]\,\mathrm{d}\omega. \tag{A.3.4}$$

Pe de altă parte, funcția de transfer se consideră a fi raportul a două polinoame; în acord cu relația (2.40)

$$\underline{G}(\mathrm{j}\omega) = \left.\frac{\sum_{q=0}^{m} \underline{B}_q(\mathrm{j}\omega)^q}{\sum_{k=0}^{n} \underline{A}_k(\mathrm{j}\omega)^k}\right|_{k=1} = \frac{R_1(\omega) + \mathrm{j}X_1(\omega)}{R_2(\omega) + \mathrm{j}X_2(\omega)}. \tag{A.3.5}$$

Părțile reale $R_1(\omega)$ și $R_2(\omega)$ rezultă din valorile pare ale lui q și k, iar cele imaginare $\mathrm{j}X_1(\omega)$ și $\mathrm{j}X_2(\omega)$ rezultă din valorile impare ale lui q și k.

Modulul funcției de transfer din (A.3.5) este

$$G(\omega) = \frac{\sqrt{R_1^2(\omega) + X_1^2(\omega)}}{\sqrt{R_2^2(\omega) + X_2^2(\omega)}}. \tag{A.3.6}$$

Se observă că acest modul este o funcție pară de ω, adică conține pe ω la puteri pare. Funcțiile $R_1(\omega)$ și $R_2(\omega)$ sînt pare, iar funcțiile $X_1(\omega)$ și $X_2(\omega)$ sînt impare, adică:

$$\begin{aligned} R_1(\omega) &= R_1(-\omega); \\ R_2(\omega) &= R_2(-\omega); \\ X_1(-\omega) &= -X_1(\omega); \\ X_2(-\omega) &= -X_2(\omega). \end{aligned} \tag{A.3.7}$$

Argumentul funcției de transfer este

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arc\,tg} \frac{X_1(\omega)\, R_2(\omega) - R_1(\omega)\, X_2(\omega)}{R_1(\omega)\, R_2(\omega) + X_1(\omega)\, X_2(\omega)} \tag{A.3.8}$$

și rezultă a fi o funcție impară, adică

$$-\varphi(\omega) = \varphi(-\omega). \tag{A.3.9}$$

În relația (A.3.4)

$$\frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \sin [\omega t + \varphi(\omega)]\, d\omega = 0,$$

deoarece integrantul este o funcție impară de ω, în timp ce

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cos [\omega t + \varphi(\omega)]\, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} G(\omega) \cos [\omega t + \varphi(\omega)]\, d\omega,$$

deoarece integrantul este o funcție pară de ω. Rezultă din (A.3.4)

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} G(\omega) \cos [\omega t + \varphi(\omega)]\, d\omega. \tag{A.3.10}$$

Pentru sisteme care sînt în repaus, pentru $t<0$, rezultă că atît răspunsul indicial, cît și funcția pondere sînt nule, adică $f(-t)=0$ și $g(-t)=0$. Dacă în expresia (A.3.4) se introduce $-t$, în loc de t, se obține

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} G(\omega) \cos [\varphi(\omega) - \omega t]\, d\omega. \tag{A.3.11}$$

Prin adunarea relațiilor (A.3.10) cu (A.3.11) rezultă

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(\omega)\cos\omega t\cos\varphi(\omega)\,\mathrm{d}\omega. \qquad (A.3.12)$$

Pentru un dispozitiv de măsurare cu defazaj minimal și compensat, $\cos\varphi(\omega)=1$, funcția pondere se calculează numai din modulul funcției de transfer

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega, \qquad (A.3.13)$$

unde :

$$\omega = 2\pi f;\ \mathrm{d}\omega = 2\pi\,\mathrm{d}f;\ G(f) = \mathrm{e}^{-k^2f^2},$$

expresia funcției indiciale rezultă

$$f(t) = \int_0^t g(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-k^2f^2}\cos(2\pi tf)\,\mathrm{d}f. \qquad (2.58)$$

Anexa 4

Deducerea relației (3.17). Determinarea constantei A din relația (3.16) se face prin punerea condițiilor la frontieră pentru cîmpul magnetic, I fiind amplitudinea excitației treaptă de curent

$$H_a = \frac{I}{2\pi a} \quad \text{la } r = a, \qquad (A.4.1.)$$

iar imaginea cîmpului este

$$\mathcal{H}_a = \frac{I}{2\pi a\mathrm{p}}. \qquad (A.4.2)$$

Din relația (3.16) se obține pentru $r=a$

$$A = \frac{I}{2\pi a\mathrm{p}}\cdot\frac{\mathrm{j}\gamma}{J_1(\mathrm{j}\gamma a)}, \qquad (A.4.3)$$

deci

$$\mathcal{H} = \frac{I}{2\pi a}\cdot\frac{1}{\mathrm{p}}\cdot\frac{J_1(\mathrm{j}\gamma r)}{J_1(\mathrm{j}\gamma a)} = \frac{I}{2\pi a}\cdot F(\mathrm{p}). \qquad (A.4.4)$$

Se aplică dezvoltarea Heaviside funcției

$$F(p) = \frac{P_1(p)}{p\,P_2(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{J_1(j\gamma r)}{J_1(j\gamma a)}, \tag{A.4.5}$$

cu relația cunoscută

$$f(t) = \frac{P_1(0)}{P_2(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_1(p_k)}{p_k P_2'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{A.4.6}$$

Ridicarea nedeterminării $\frac{P_1(0)}{P_2(0)} = \frac{J_1(0)}{J_1(0)} = \frac{0}{0}$ se face utilizînd expresiile funcțiilor Bessel pentru argument foarte mic, adică $J_1(x) = \frac{x}{2}$ pentru $x \ll 1$.

Deci

$$\frac{P_1(0)}{P_2(0)} = \frac{r}{a}. \tag{A.4.7}$$

Anularea numitorului $P_2(p) = J_1(j\gamma a)$ se consideră pentru rădăcinile $\beta_k = j\gamma_k a$;

$$J_1(\beta_k) = 0, \tag{A.4.8}$$

care conduc cu ajutorul relației (3.10) la

$$p_k = -\frac{\beta_k^2}{\tau\mu a^2}. \tag{A.4.9}$$

Se pot calcula astfel expresiile:

$$p_k P_k'(p_k) = p_k \left[\frac{d}{dp} J_1(j\gamma a)\right] = \frac{1}{2}\beta_k J_1'(\beta_k) = \frac{1}{2}\beta_k \left[-\frac{1}{\beta_k} J_1(\beta_k) + J_0(\beta_k)\right] = \frac{1}{2}\beta_k J_0(\beta_k) \tag{A.4.10}$$

și

$$P_1(p_k) = J_1(j\gamma_k r) \qquad J_1\left(\beta_k \frac{r}{a}\right); \tag{A.4.11}$$

Rezultă, înlocuind relaţiile (A.4.7), (A.4.10) şi (A.4.11) în relaţia (A.4.6)

$$f(t) = \frac{r}{a} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\beta_k \frac{r}{a}\right)}{\beta_k J_0(\beta_k)} e^{-\frac{\beta_k^2}{\sigma\mu a^2} t}. \qquad \text{(A.4.12)}$$

Din relaţiile (A.4.12) şi (A.4.4) se obţine relaţia (3.17).

Anexa 5

Deducerea relaţiei (3.18). Din relaţiile (3.12) şi (3.17) se obţine

$$J = \frac{1}{r} H + \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{2\pi ar}\left[\frac{r}{a} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\beta_k \frac{r}{a}\right)}{\beta_k J_0(\beta_k)} e^{-\frac{t}{T_k}}\right] +$$

$$+ \frac{I}{2\pi a}\left[\frac{1}{a} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\beta_k}{a} J_1'\left(\beta_k \frac{r}{a}\right)}{\beta_k J_0(\beta_k)} e^{-\frac{t}{T_k}}\right] = \frac{I}{2\pi ar}\left[\frac{2r}{a} +\right.$$

$$\left. + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\beta_k \frac{r}{a}\right) + \beta_k \frac{r}{a} J_1'\left(\beta_k \frac{r}{a}\right)}{\beta_k J_0(\beta_k)} e^{-\frac{t}{T_k}}\right]. \qquad \text{(A.5.1)}$$

Înlocuind în relaţia (A.5.1) pe

$$J_1'\left(\beta_k \frac{r}{a}\right) = -\frac{a}{\beta_k r} J_1\left(\beta_k \frac{r}{a}\right) + J_0\left(\beta_k \frac{r}{a}\right),$$

se obţine

$$J = \frac{I}{2\pi ar}\left[\frac{2r}{a} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{r}{a} J_0\left(\beta_k \frac{r}{a}\right)}{J_0(\beta_k)} e^{-\frac{t}{T_k}}\right] =$$

$$= \frac{I}{\pi a^2}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\beta_k \frac{r}{a}\right)}{J_0(\beta_k)} e^{-\frac{t}{T_k}}\right],$$

care este chiar relaţia (3.18).

Anexa 6

Deducerea relaţiilor (3.23) şi (3.24). Se consideră legătura între intensitatea cîmpului magnetic şi cea a cîmpului electric, în peretele tubului la distanţa r de axa tubului

$$H = \frac{i}{2\pi r}, \tag{A.6.1}$$

unde i reprezintă curentul care trece prin secţiunea unui tub de rază interioară r_i şi de o rază exterioară oarecare $r < r_e$. Înlocuind în (3.5) se obţine

$$\frac{\partial^2 i}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial i}{\partial r} = \sigma\mu \frac{\partial i}{\partial t}. \tag{A.6.2}$$

Făcînd schimbările de variabilă

$$r = r_i + \delta x \text{ şi } t = \sigma\mu\, \delta^2 \tau$$

unde δ este grosimea tubului, iar $0 < x < 1$, rezultă

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{r_i/\delta + x} \cdot \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{i}{\partial \tau}.$$

Dacă tubul este suficient de subţire, se neglijează termenul $\frac{1}{r_i/\delta + x} \cdot \frac{\partial i}{\partial x}$ şi ecuaţia devine

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial i}{\partial \tau}.$$

Făcînd o nouă înlocuire

$$y = \pi x$$

se obţine

$$\frac{\partial^2 i}{\partial y^2} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial i}{\partial \tau}. \tag{A.6.3}$$

Aplicînd transformarea Laplace $\mathfrak{L}(i) = \mathfrak{I}$ se obţine ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathfrak{I}}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{p}}{\pi^2} \mathfrak{I}$$

cu soluția

$$\mathfrak{I} = A\, e^{-\frac{\sqrt{p}}{\pi} y} + B e^{\frac{\sqrt{p}}{\pi} y}. \tag{A.6.4}$$

Condițiile de graniță sînt :

$$r = r_i ; \quad x = 0 ; \quad y = 0 ; \quad i = 0,$$

$$r = r_e ; \quad x = 1 ; \quad y = \pi ; \quad i = \mathrm{I}. \tag{A.6.5}$$

Deci din relațiile (A.6.4) și (A.6.5) se deduce

$$A = -B = \frac{I}{\mathrm{p}\,(e^{-\sqrt{\mathrm{p}}} - e^{\sqrt{\mathrm{p}}})}$$

sau

$$\mathfrak{I} = \frac{I}{\mathrm{p}} \cdot \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{\pi} y\right)}{\mathrm{sh}\sqrt{\mathrm{p}}} = F(\mathrm{p}) = \frac{P_1(\mathrm{p})}{\mathrm{p}\, P_2(\mathrm{p})}.$$

Aplicînd dezvoltarea Heaviside

$$i(t) = \frac{P_1(0)}{P_2(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_1(p_k)}{\mathrm{p}_k\, P_2'(\mathrm{p}_k)}\, e^{p_k t} \tag{A.6.6}$$

se ridică nedeterminarea $\frac{P_1(0)}{P_2(0)} = \frac{0}{0}$, cu ajutorul regulei lui l'Hôspital

$$\lim_{\mathrm{p}\to 0} \frac{P_1(\mathrm{p})}{P_2(\mathrm{p})} = \lim_{\mathrm{p}\to 0} \frac{I \frac{y}{2\pi\sqrt{\mathrm{p}}} \mathrm{ch}\frac{\sqrt{\mathrm{p}}}{\pi} y}{\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{p}}} \mathrm{ch}\sqrt{\mathrm{p}}} = I\frac{y}{\pi}. \tag{A.6.7}$$

$P_2(\mathrm{p})$ se anulează pentru :

$$\mathrm{sh}\sqrt{\mathrm{p}} = \frac{1}{\mathrm{j}} \sin \mathrm{j}\sqrt{\mathrm{p}} = 0 ;$$

$$\mathrm{j}\sqrt{p_k} = k\pi \quad \text{sau} \quad \mathrm{p}_k = -k^2\pi^2. \tag{A.6.8}$$

Rezultă

$$P_1(p_k) = \frac{I}{j} \sin j \sqrt{p_k}\, y = \frac{1}{j} \sin ky; \qquad \text{(A.6.9)}$$

$$p_k P_2'(p_k) = p_k \frac{1}{2\sqrt{p_k}} \operatorname{ch} \sqrt{p_k} = \frac{k\pi}{2j} \cos k\pi = \frac{k\pi}{2j} (-1)^k. \qquad \text{(A.6.10)}$$

Deci din relațiile (A.6.6) și (A.6.7) rezultă:

$$i(y, \tau) = I \frac{y}{\pi} + I \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin ky}{(-1)^k k\pi} e^{-k^2\pi^2\tau}$$

sau

$$i(x, \tau) = Ix + I \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin k\pi x}{(-1)^k k\pi} e^{-k^2\pi^2\tau}. \qquad \text{(A.6.11)}$$

Calculînd densitatea de curent $J = \frac{di}{dA}$, unde $dA = 2\pi(r_i + \delta x)\delta . dx = 2\pi r\delta . dx$, se obține din relația (A.6.11)

$$J(x, \tau) = \frac{I}{2\pi r\delta} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2 \cos k\pi x) e^{-k^2\pi^2\tau} \right]. \qquad \text{(A.6.12)}$$

Pentru

$$x = 1; \quad r_i + \delta = r_e; \quad J = J_e,$$

$$J_e(\tau) = \frac{I}{2\pi r_e \delta} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\pi^2\tau} \right]. \qquad \text{(A.6.13)}$$

Pentru

$$x = 0; \; J = J_i,$$

$$J_i(\tau) = \frac{I}{2\pi r_i \delta} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2\pi^2\tau} \right]; \qquad \text{(A.6.14)}$$

Înlocuind pe $\tau = \frac{t}{\tau_\mu \delta^2}$ în ecuațiile (A.6.11) și (A.6.12) se obțin ecuațiile (3.23) și (3.24).

Anexa 7

Deducerea relației (3.30). În relația (3.15) constantele A și B se determină prin punerea condițiilor la frontieră pentru cîmpul magnetic :

$$\text{pentru } r = r_i\,;\; H_i = 0\,;\; \mathcal{H}_i = 0, \tag{A.7.1}$$

$$\text{pentru } r = r_e\,;\quad H_e = \frac{I}{2\,\pi r_e}\,;\quad \mathcal{H}_e = \frac{1}{\mathrm{p}} \cdot \frac{I}{2\,\pi r_e}\,.$$

Cu condițiile (A. 7.1), relația (3.15) devine

$$0 = \frac{\sigma}{\mathrm{j}\gamma}\left[AJ_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i) + BN_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)\right] \tag{A.7.2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{p}} \cdot \frac{I}{2\,\pi r_e} = \frac{\sigma}{\mathrm{j}\gamma}\,[AJ_1(\mathrm{j}\,\gamma r_e) + BN_1(\mathrm{j}\,\gamma r_e)]. \tag{A.7.3}$$

Din (A.7.1) și (A.7.2) se obține :

$$A = -\frac{1}{\mathrm{p}} \cdot \frac{I}{2\,\pi r_e} \cdot \frac{\mathrm{j}\gamma}{\sigma} \cdot \frac{N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)}{J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)\,N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_e) - J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_e)\,N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)}\,; \tag{A.7.4}$$

$$B = \frac{1}{\mathrm{p}}\,\frac{I}{2\,\pi r_e} \cdot \frac{\mathrm{j}\gamma}{\sigma} \cdot \frac{J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)}{J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)\,N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i) - J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_e)\,N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)}\,. \tag{A.7.5}$$

Înlocuind (A.7.4) și (A.7.5) în relația (3.15) se obține imaginea cîmpului magnetic

$$\mathcal{H} = \frac{I}{2\,\pi r_e} \cdot \frac{1}{\mathrm{p}}\left[\frac{J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)\,N_1(\mathrm{j}\,\gamma r) - N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)\,J_1(\mathrm{j}\,\gamma r)}{J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)\,N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_e) - J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_e)\,N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)}\right] = \frac{I}{2\,\pi r_e}\,F(\mathrm{p}), \tag{A.7.6}$$

în care

$$F(\mathrm{p}) = \frac{P_1(\mathrm{p})}{\mathrm{p}P_2(\mathrm{p})} = \frac{1}{\mathrm{p}} \cdot \frac{J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)\,N_1(\mathrm{j}\,\gamma r) - N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)\,J_1(\mathrm{j}\,\gamma r)}{J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)\,N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_e) - J_1(\mathrm{j}\,\gamma r_e)\,N_1(\mathrm{j}\,\gamma r_i)}\,. \tag{A.7.7}$$

Aplicînd dezvoltarea Heaviside funcției $F(p)$, se obține funcția original

$$f(t) = \frac{P_1(0)}{P_2(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_1(p_k)}{p_k\, P_2'(p_k)}\, e^{p_k t}\,. \tag{A.7.8}$$

Ridicarea nedeterminării

$$\frac{P_1(0)}{P_2(0)} = \frac{J_1(0)\, N_1(0) - N_1(0)\, J_1(0)}{J_1(0)\, N_1(0) - J_1(0)\, N_1(0)}$$

se face utilizînd expresia funcțiilor Bessel pentru argument mic, adică

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \quad \text{și} \quad N_1(x) = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{x}\,; \quad |x| \ll 1$$

și se obține

$$\frac{P_1(0)}{P_2(0)} = \frac{(r^2 - r_i^2)\, r_e}{(r_e^2 - r_i^2)\, r}. \tag{A.7.9}$$

Anularea numitorului

$$P_2(p) = J_1(j\gamma r_i)\, N_1(j\gamma r_e) - J_1(j\gamma r_e)\, N_1(j\gamma r_i) =$$

$$= J_1(x)\, N_1(mx) - J_1(mx)\, N_1(x) = 0,$$

în care $x = j\gamma r_i$ și $m = \frac{r_e}{r_i}$,

se face pentru valori x_k tabelate [40].

În consecință, din relația (3.10) se obține

$$p_k = -\frac{x_k^2}{\sigma\mu\, r_i^2} \tag{A.7.10}$$

cu

$$x_k = j\,\gamma_k r_i.$$

Se poate calcula astfel expresia

$$P_1(p_k) = J_1(x_k)\, N_1\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) - N_1(x_k)\, J_1\left(x_k \frac{r}{r_i}\right); \tag{A.7.11}$$

în care

$$j\,\gamma_k r = x_k \frac{r}{r_i}$$

și

$$p_k\, P_2'(p_k) = p_k \frac{d}{dp}\,[J_1(j\,\gamma r_i)\, N_1(j\,\gamma r_e) - J_1(j\,\gamma r_e)\, N_1(j\,\gamma r_i)] =$$

$$= -\frac{x_k}{2}\,\{J_1(mx_k)\, N_0(x_k) - N_1(mx_k)\, J_0(x_k) +$$

$$+ m[N_1(x_k) J_0(mx_k) - J_1(x_k) N_0(mx_k)]\} = -\frac{1}{2}\, x_k a_k, \qquad \text{(A.7.12)}$$

cu $\gamma' = \frac{\sigma\mu}{2\gamma}$; $J_1'(x) = -\frac{1}{x} J_1(x) + J_0(x)$; $N_1'(x) = -\frac{1}{x} N_1(x) + N_0(x)$

$$P_2'(p_k) = -\,j\,\frac{\sigma\mu}{2\gamma_k}\, r_i\, a_k.$$

Din relațiile (A.7.8) și (A.7.12) se obține

$$f(t) = \frac{(r^2 - r_i^2)\, r_e}{(r_e^2 - r_i^2)\, r} -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(x_k)\, N_1\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) - N_1(x_k)\, J_1\left(x_k \frac{r}{r_i}\right)}{x_k\, a_k}\, e^{-\frac{t}{T_k}} \qquad \text{(A.7.13)}$$

Cum $H = \frac{I}{2\,\pi r_e} f(t)$, cu ajutorul relației (A.7.13) se obține relația (3.30).

Anexa 8

Deducerea relației (3.33). Din relațiile (3.30) și (3.31) se obține

$$J(r, t) = \frac{I}{2\,\pi r_e\, r} \left\{ \frac{(r^2 - r_i^2)}{(r_e^2 - r_i^2)} \cdot \frac{r_e}{r} - \right.$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(x_k)\, N_1\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) - N_1(x_k)\, J_1\left(x_k \frac{r}{r_i}\right)}{x_k a_k} e^{-\frac{t}{T_k}} \Bigg\} +$$

$$+ \frac{I}{2\pi r_e} \left\{ \frac{r_e}{r_e^2 - r_i^2} \cdot \frac{r^2 + r_i^2}{r^2} - \right.$$

$$\left. - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{x_k}{r_i} \left[(J_1(x_k)\, N_1'\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) - N_1(x_k)\, J_1'\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) \right]}{x_k a_k} e^{-\frac{t}{T_k}} \right\}. \quad (A.8.1)$$

Introducînd în relaţia (A.8.1) expresiile :

$$J_1'\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) = - \frac{r_i}{x_k r} J_1\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) + J_0\left(x_k \frac{r}{r_i}\right);$$

$$N_1'\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) = - \frac{r_i}{x_k r} N_1\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) + N_0\left(x_k \frac{r}{r_i}\right),$$

se obţine

$$J(r, t) = \frac{I}{2\pi r_e r} \left\{ \frac{2 r_e r}{r_e^2 - r_i^2} - \right.$$

$$\left. - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k r}{r_i} \frac{\left[J_1(x_k)\, N_0\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) - N_1(x_k)\, J_0\left(x_k \frac{r}{r_i}\right) \right]}{x_k a_k} e^{-\frac{t}{T_k}} \right\} \quad (A.8.2)$$

Din relaţia (A.8.2) se obţine relaţia (3.33).

Anexa 9

Deducerea relaţiei (3.91). Prin introducerea expresiei densităţii de curent din (3.88) în relaţia (3.90) se obţine

$$P_J = \frac{I^2}{(2\pi\delta)^2 \sigma} \int_0^1 \frac{1}{(r_i + \delta x)^2} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2 \cos k\pi x)\, e^{-\frac{t}{T_k}} \right] \times$$

$$\times 2\pi(r_i + \delta x)\, 1\, \delta\, dx =$$

$$= \frac{I^2 l}{2\pi\sigma\, \delta r_i} \int_0^1 \frac{r_i}{r_i + \delta x} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2 \cos k\pi x) e^{-\frac{t}{T_k}} \right]^2 dx. \quad (A.9.1)$$

Pentru grosimi mici de tub, $\frac{r}{r_i + \delta x} \approx 1$, deci, integrala din expresia (A.9.1) devine

$$A = \int_0^1 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2 \cos k\,\pi x)\, e^{-\frac{t}{T_k}}\right]^2 dx =$$

$$= \int_0^1 dx + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{t}{T_k}} \int_0^1 \cos k\,\pi x\, dx +$$

$$+ 4 \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} (-1)^{m+n} e^{-\left(\frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_n}\right) t} \int_0^1 \cos m\,\pi x \cos n\,\pi x\, dx +$$

$$+ 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k} e^{-\frac{2t}{T_k}} \int_0^1 \cos^2 k\,\pi x\, dx.$$

Rezultatele pentru fiecare integrală sînt :

$$\int_0^1 dx = 1; \quad \int_0^1 \cos k\,n\,x\, dx = \left| \frac{\sin k\,\pi x}{k\pi} \right|_0^1 = 0;$$

$$\int_0^1 \cos m\,\pi x \cos n\,\pi x\, dx = \left| \frac{\sin(m+n)\,x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)\,x}{2(m-n)} \right|_0^1 = 0;$$

$$\int_0^1 \cos^2 k\,\pi x\, dx = \left| \frac{x}{2} + \frac{1}{4\,k\pi} \sin 2k\,\pi x \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, puterea corespunzătoare efectului Joule-Lenz este

$$P_J = \frac{I^2 l}{2\,\pi\sigma\,\delta r_i} A = P_0 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{2t}{T_k}}\right]. \qquad (3.91)$$

Anexa 10

Deducerea relației (3.108). Înlocuind în ecuațiile (3.106) și (3.107) : $i = -i_m$ și $u = u_m - u_x$ și aplicînd transformarea Laplace se obține

$$\frac{d\mathcal{U}_m}{dx} = pL_0 \mathcal{I}_m; \quad \frac{d\mathcal{I}_m}{dx} = pC_0 (\mathcal{U}_m - \mathcal{U}_x). \qquad (A.10.1)$$

Eliminînd pe $\mathcal{I}_m$ din prima dintre ecuații rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{U}_m}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{p}L_0\, \mathrm{p}C_0(\mathcal{U}_m - \mathcal{U}_x) = \gamma^2(\mathcal{U}_m - \mathcal{U}_x) \qquad \text{(A.10.2)}$$

cu

$$\gamma = \mathrm{p}\sqrt{L_0 C_0}. \qquad \text{(A.10.3)}$$

Ținînd seama că $i_m \ll i_t$, se poate calcula tensiunea în lungul tubului

$$u_x = R_0 x(i_t - i_m) \approx R_0 x i_t = u_0 x \qquad \text{(A.10.4)}$$

în care

$$u_0 = R_0 i_t.$$

Deci transformata Laplace a acestei tensiuni este $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_0\, x$. Soluția ecuației (A.10.2) este de forma

$$\mathcal{U}_m = C_1\, \mathrm{e}^{\gamma x} + C_2\, \mathrm{e}^{-\gamma x} + \mathcal{U}_0\, x. \qquad \text{(A.10.5)}$$

Din relațiile (A.10.1) și (A.10.5) rezultă curentul $\mathcal{I}_m$

$$\mathcal{I}_m = \frac{\gamma}{\mathrm{p}L_0}(C_1\, \mathrm{e}^{\gamma x} - C_2\, \mathrm{e}^{-\gamma x}) + \frac{\mathcal{U}_0}{\mathrm{p}L_0} = \frac{C_1}{Z_c}\, \mathrm{e}^{\gamma x} - \frac{C_2}{Z_c}\, \mathrm{e}^{-\gamma x} + \frac{\mathcal{U}_0}{\mathrm{p}L_0} \qquad \text{(A.10.6)}$$

cu

$$Z_c = \frac{\mathrm{p}L_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din soluțiile (A.10.5) și (A.10.6) pentru condiția la limită $x = 0$

$$\mathcal{U}_{m1} = C_1 + C_2;\ \mathcal{I}_{m1} = \frac{C_1 - C_2}{Z_c} + \frac{\mathcal{U}_0}{pL_0} \qquad \text{(A.10.7)}$$

Deci :

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[\mathcal{U}_{m1} + \mathcal{I}_{m1} Z_c = \frac{Z_c \mathcal{U}_0}{\mathrm{p}L_0}\right];$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[\mathcal{U}_{m1} - \mathcal{I}_{m1} Z_c + \frac{Z_c \mathcal{U}_0}{\mathrm{p}L_0}\right],$$

care introduse în (A.10.5) și (A.10.6) conduc la

$$\mathfrak{U}_m = \mathfrak{U}_{m1} \operatorname{ch} \gamma x + \left[\mathfrak{I}_{m1} Z_c = \frac{Z_c}{pL_0} \mathfrak{U}_0 \right] \operatorname{sh} \gamma x + \mathfrak{U}_0 x ; \quad \text{(A.10.8)}$$

$$\mathfrak{I}_m = \frac{\mathfrak{U}_{m1}}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x + \left[\mathfrak{I}_{m1} - \frac{\mathfrak{U}_0}{pL_0} \right] \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\mathfrak{U}_0}{pL_0} . \quad \text{(A.10.9)}$$

Ținînd seama că pentru $x = l$, $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_{m2} - \mathfrak{U}_0 l$, cu $\mathfrak{U}_2 = 0$, linia fiind scurtcircuitată la acest capăt, rezultă din (A.10.9)

$$\mathfrak{U}_{m2} = \mathfrak{U}_0 l = \mathfrak{U}_{m1} \operatorname{ch} \gamma l + \left(\mathfrak{I}_{m1} Z_c - \frac{Z_c}{pL_0} \mathfrak{U}_0 \right) \operatorname{sh} \gamma l + \mathfrak{U}_0 l$$

sau transformata Laplace a tensiunii măsurate este

$$\mathfrak{U}_{m1} = \left(- \mathfrak{I}_1 Z_c + \frac{Z_c}{pL_0} \mathfrak{U}_0 \right) \operatorname{th} \gamma l.$$

Ținînd seama că încercarea șuntului se face la excitația treaptă de curent $i_t = I$, rezultă $u_0 = R_0 I = U_0 = U/l$, în care $U = R_0 \cdot l \cdot I = RI$, iar transformata $\mathfrak{U}_0 = U/pl$

$$\mathfrak{U}_{m1} = \left(- \mathfrak{I}_{m1} Z_c + \frac{Z_c}{pL_0} \frac{U}{pl} \right) \operatorname{th} \gamma l. \quad \text{(A.10.10)}$$

Pentru a se obține originalul expresiei (A.10.10) se consideră cîteva cazuri particulare ale impedanței Z din fig. 3.34.

Linie deschisă $Z = \infty$, $\mathfrak{I}_{m1} = 0$

Rezultă din (A.10.10)

$$\mathfrak{U}_{m1} = \frac{Z_0}{pl_0} \cdot \frac{U}{pl} \cdot \operatorname{th} \gamma l = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \cdot \frac{U}{pL_0} \cdot \frac{U}{pl} \cdot \operatorname{th} pT_0 =$$

$$= \frac{U}{p^2 T_0} \frac{e^{pT_0} - e^{-pT_0}}{e^{pT_0} + e^{-pT_0}} = \frac{2U}{2p^2 T_0} \cdot \frac{1 - e^{-2pT_0}}{1 + e^{-2pT_0}}, \quad \text{(A.10.11)}$$

în care s-a notat

$$\gamma l = pl \sqrt{L_0 C_0} = p \sqrt{LC} = pT_0, \text{ iar } T_0 = \sqrt{LC}$$

are dimensia unui timp.

Conform [11] originalul expresiei (A.10.11) este indicat în fig. A.10.1, *a*. Se observă că tensiunea măsurată $u_{m1}(t)$ oscilează cu perioada $T = 4\,T_0$, corespunzător relației (3.108) în jurul valorii U_0.

În consecință pentru orice valoare $Z \neq Z_c$ se obțin oscilații de tensiune, deci pentru ca linia să fie lipsită de oscilații, ea trebuie adaptată.

Linie adaptată. $Z = Z_c$, $U_{m1} = I_{m1} Z_c$, rezultă din (A.10.10):

$$\mathfrak{U}_{m1} = -\mathfrak{U}_{m1} \operatorname{th} \gamma l + \frac{Z_c}{pL_0} \cdot \frac{U}{pl} \operatorname{th} \gamma l$$

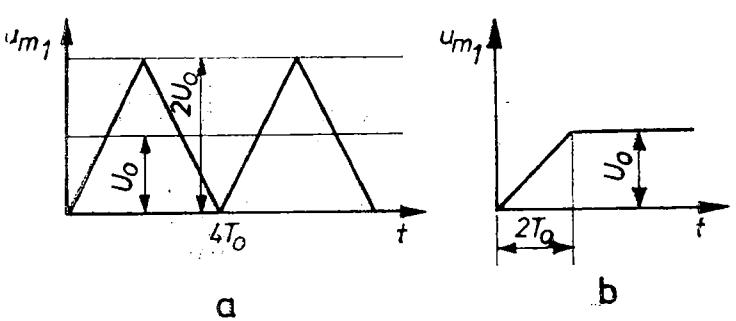
sau

$$\mathfrak{U}_{m1} = \frac{Z_c}{pL_0} \cdot \frac{U}{pl} \cdot \frac{\operatorname{th} \gamma l}{1 + \operatorname{th} \gamma l} = \frac{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}{p^2 l L_0} \cdot \frac{U(e^{pT_0} - e^{-pT_0})}{2e^{pT_0}} =$$

$$= \frac{U}{2\,p^2 T_0} (1 - e^{-2pT_0}). \qquad \text{(A.10.12)}$$

Conform [11] originalul expresiei (A.10.12) este indicat în fig. A: 10.1, *b*. Se observă că $u_{m1}(t)$ variază aperiodic și ajunge după $t = 2\,T_0$ la valoarea U_0.

Timpul de răspuns corespunzător fenomenului de propagare pe linia adaptată este, conform fig. A.10.1, *b*, egal cu $T_0 = \sqrt{LC}$.



A.10.1. Referitor la adaptarea internă a șuntului coaxial.

Anexa 11

Deducerea relației (4.41). Notînd transformatele Laplace cu litere mari ronde, din relațiile (4.37), (4.38), (4.39) se obține :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\mathcal{I}_1}{\mathrm{p}K_{01}}; \tag{A.11.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}}{\mathrm{d}x} = -\left(\mathrm{p}L_0 + \frac{1}{\mathrm{p}K_{02}} + R_0\right)\mathcal{I}_2; \tag{A.11.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{I}_2}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{p}C_0\,\mathcal{U}. \tag{A.11.3}$$

Prin derivarea în raport cu x a primelor două relații și introducerea în a treia se obține

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{C_0L_0(\mathrm{p}^2 + \mathrm{p}R_0/L_0 + 1/L_0K_{02})}{K_{01}L_0(\mathrm{p}^2 + \mathrm{p}R_0/L_0 + 1/L_0K_{02}) + 1} = 0. \tag{A.11.4}$$

Se notează

$$\lambda = \sqrt{\frac{C_0L_0(\mathrm{p}^2 + \mathrm{p}R_0/L_0 + 1/L_0K_{02})}{K_{01}L_0(\mathrm{p}^2 + \mathrm{p}R_0/L_0 + 1/L_0K_{02}) + 1}} \tag{A.11.5}$$

și se păstrează notațiile (4.36). Se obține astfel

$$\lambda = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{LC(\mathrm{p}^2 + \mathrm{p}R/L + 1/LK_2)}{K_1L(\mathrm{p}^2 + R/RL + 1/LK_2)}} = \frac{1}{l}\,\alpha \tag{A.11.6}$$

cu

$$\alpha = \frac{LC(\mathrm{p}^2 + \mathrm{p}R/L + 1/LK_2)}{K_1L(\mathrm{p}^2 + \mathrm{p}/RL + 1/LK_2)}. \tag{A.11.7}$$

Soluția generală, în domeniul imagine, a ecuației (A.11.4) este

$$\mathcal{U} = A\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}. \tag{A.11.8}$$

Condiţiile la limită sînt:

— pentru $x = 0$; $u = 0$; $\mathcal{U} = 0$;

— pentru $x = l$; $u = U$; $\mathcal{U} = U/\mathrm{p}$.

Rezultă astfel soluţia în domeniul imagine

$$\mathcal{U} = \frac{U}{\mathrm{p}} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,\frac{x}{l}\sqrt{\alpha}}{\mathrm{sh}\sqrt{\alpha}} = \frac{U}{\mathrm{p}} \cdot \frac{1}{f(\mathrm{p})}, \tag{A.11.9}$$

cu

$$f(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{\alpha}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{l}\sqrt{\alpha}}. \tag{A.11.10}$$

Funcţia original se calculează cu formula dezvoltării a lui Heaviside

$$u(t) = U\left[\frac{1}{f(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{p_i t}}{p_i f'(p_i)}\right], \tag{A.11.11}$$

unde p_i sînt valorile care anulează $f(\mathrm{p})$. Se observă că

$$f(0) = \mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{\dfrac{C}{K_1 + K_2}}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{x}{l}\sqrt{\dfrac{C}{K_1 + K_2}}}. \tag{A.11.12}$$

Prin dezvoltarea în serie a numărătorului şi a numitorului din relaţia (A.11.12) se obţine

$$f(0) = \frac{1 + \dfrac{C}{6(K_1 + K_2)}}{\dfrac{x}{l} + \dfrac{x^2}{l^2} \cdot \dfrac{C}{K_1 + K_2}} \approx \frac{1 + \dfrac{C}{6(K_1 + K_2)}}{\dfrac{x}{l}};$$

deoarece $x/l \ll 1$ şi $C/(K_1 + K_2) \ll 1$. Ca urmare,

$$\frac{1}{f(0)} = \frac{l}{x} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{1}{6(K_1 + K_2)}} \approx \frac{x}{l}\left(1 - \frac{1}{6(K_1 + K_2)}\right). \tag{A.11.13}$$

Rădăcinile numitorului în relaţia (A.11.9) se anulează pentru $\mathrm{sh}\sqrt{\alpha} = 0$ sau ţinînd seama de relaţiile între funcţiile trigonometrice şi cele hiperbolice pentru $\frac{1}{J}\sin \mathrm{j}\sqrt{\alpha} = 0$, adică pentru

$$\mathrm{j}\sqrt{\alpha} = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{A.11.14}$$

din (A.11.14) şi (A.11.7) se obţine ecuaţia în p

$$\mathrm{p}^2(n^2\pi^2K_1L + LC) + \mathrm{p}(K_1Rn^2\pi^2 + RC) + n^2\pi^2(1 + K_1/K_2) + C/K_2 = 0 \tag{A.11.15}$$

cu rădăcinile

$$\mathrm{p}_i = -\delta \pm \omega_e \tag{A.11.16}$$

şi notaţiile:

$$\delta = R/2L \tag{4.42}$$

$$\omega_e = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1 + \dfrac{K_1}{K_2} + \dfrac{C}{K_2n^2\pi^2}}{\dfrac{LC}{n^2\pi^2}\left(1 + \dfrac{K_1n^2\pi^2}{C}\right)}} = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{4.43}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1 + \dfrac{K_1}{K_2} + \dfrac{C}{K_2n^2\pi^2}}{\dfrac{LC}{n^2\pi^2}\left(1 + \dfrac{K_1n^2\pi^2}{C}\right)}. \tag{4.44}$$

Se poate acum calcula

$$f'(\mathrm{p}_i) = \frac{\mathrm{sh}\dfrac{x}{l}\sqrt{\alpha}\cdot \mathrm{ch}\sqrt{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}} - \mathrm{sh}\sqrt{\alpha}\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{l}\sqrt{\alpha}\cdot\dfrac{x}{l}\cdot\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\alpha}}}{\left[\mathrm{sh}\dfrac{x}{l}\sqrt{\alpha}\right]^2}.$$

Pentru $\frac{x}{l} \ll 1$ se poate considera $\mathrm{sh}\,\frac{x}{l}\sqrt{\alpha} \approx \frac{x}{l}\sqrt{\alpha}$ și $\mathrm{ch}\sqrt{\alpha} \approx 1$.

Se obține astfel

$$f'(p_i) = \frac{l}{x} \cdot \frac{\alpha'}{2\alpha}\left[\mathrm{ch}\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{sh}\sqrt{\alpha}\right]. \qquad \text{(A.11.17)}$$

Se calculează $\alpha' = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}p$ din relația (A.11.7) cu observația $K_1/K_2 \ll 1$; se obține

$$\alpha' = \pm 2l\omega_e(C + K_1 n^2\pi^2)^2/C, \qquad \text{(A.11.18)}$$

se mai observă că

$$\mathrm{ch}\sqrt{\alpha} = \mathrm{ch}\,(-\mathrm{j}n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n;$$

$$\mathrm{sh}\sqrt{\alpha} = \mathrm{sh}\,(-\mathrm{j}n\pi) = -\mathrm{j}\sin n\pi = 0; \qquad \text{(A.11.19)}$$

$$\alpha = (\sqrt{\alpha})^2 = (-\mathrm{j}\,n\pi)^2 = -n^2\pi^2.$$

Cu aceste elemente determinate se poate calcula expresia (A.11.17)

$$f'(p) = \frac{l}{x} \cdot \frac{(-1)^n\,[\pm L\omega_e(C + K_1 n^2\pi^2)^2]}{-C\,n^2\pi^2}.$$

Se obține astfel soluția în original

$$u(t) = U\frac{x}{l}\left[1 - \frac{C}{6(K_1+K_2)} - \mathrm{e}^{-\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,e^{\pm\,\omega_e t}\,Cn^2\pi^2}{(-\delta\pm\omega_e)(\pm\omega_e)\,L(C+K_1n^2\pi^2)^2}\right], \qquad \text{(A.11.20)}$$

dar se observă că, pentru înregistrarea numai a soluțiilor distincte se poate scrie

$$\frac{\mathrm{e}^{\pm\omega_e t}}{(-\delta\pm\omega_e)(\pm\omega_e)} \to \frac{\mathrm{e}^{\omega_e t}}{(-\delta+\omega_e)\omega_e} + \frac{\mathrm{e}^{-\omega_e t}}{(\delta+\omega_e)\omega_e} =$$

$$= 2\,(\mathrm{ch}\,\omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e}\,\mathrm{sh}\omega_e t)/(\omega_e^2 - \delta^2). \qquad \text{(A.11.21)}$$

Dar

$$\omega_e^2 - \delta^2 = -\frac{1 + \dfrac{K_1}{K_2} + \dfrac{C}{K_2 n^2\pi^2}}{\dfrac{LC}{n^2\pi^2}\left(1 + \dfrac{K_1 n^2\pi^2}{C}\right)}. \qquad \text{(A.11.22)}$$

Expresiile (A.11.21) şi (A.11.22) se introduc în (A.11.20) şi se obţine relaţia finală (4.41).

Anexa 12

Deducerea relaţiei (4.51). Din ecuaţiile (4.49) şi (4.50) transcrise în imagine Laplace se obţine

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}}{\mathrm{d}x} = -\left(\frac{1}{K_0 \mathrm{p}} + R_0\right)\mathcal{I}; \qquad \text{(A.12.1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}}{\mathrm{d}x} = -C_0 \mathrm{p}\mathcal{U}, \qquad \text{(A.12.2)}$$

din care rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{C_0(1 + R_0 K_0 \mathrm{p})\mathcal{U}}{K_0} = 0, \qquad \text{(A.12.3)}$$

cu soluţia în imagine, (vezi anexa 11), la excitaţia treaptă U de tensiune

$$\mathcal{U} = \frac{U}{\mathrm{p}} \cdot \frac{\sin\, h\, \lambda x}{\sin\, h\, \lambda l} = \frac{U}{\mathrm{p}} \cdot \frac{\mathrm{sh}\, \dfrac{x}{l}\sqrt{\alpha}}{\mathrm{sh}\sqrt{\alpha}} = \frac{U}{\mathrm{p}} \cdot \frac{1}{f(\mathrm{p})} \qquad \text{(A.12.4)}$$

unde :

$$\lambda = \sqrt{\frac{C_0(1 + R_0 K_0 \mathrm{p})}{K_0}} = \frac{1}{l}\sqrt{\alpha}; \qquad \text{(A.12.5)}$$

$$\alpha = \frac{C(1 + RK\mathrm{p})}{K}. \qquad \text{(A.12.6)}$$

Soluția în domeniul original se obține cu relația de tipul (A.11.11). În acest scop se calculează

$$f(0) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{C}{K}}}{\operatorname{sh}\frac{x}{l}\sqrt{\frac{C}{K}}} = \frac{1 + \frac{C}{6K}}{\frac{x}{l}\left(1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{x^2}{l^2}\cdot\frac{C}{K}\right)}\,!$$

Pentru $x/l \ll 1$ rezultă astfel

$$\frac{1}{f(0)} = \frac{x}{l}\cdot\frac{1}{1 + \frac{1}{6}\frac{C}{K}} \approx \frac{x}{l}\left(1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{C}{K}\right)\,! \qquad \text{(A.12.7)}$$

Pentru a găsi rădăcinile numitorului în relația (A.12.4) se observă că

$$\operatorname{sh}\sqrt{\alpha} = \frac{1}{\mathrm{j}}\sin\sqrt{\alpha} = 0 \quad \text{și deci} \quad \mathrm{j}\sqrt{\alpha} = n\pi \quad \text{sau} \quad \sqrt{\alpha} = -\mathrm{j}n\pi,$$

adică

$$\sqrt{\frac{C(1 + RK\mathrm{p})}{K}} = -\mathrm{j}n\pi, \text{ cu } n = 1, 2, 3 \ldots \qquad \text{(A.12.8)}$$

Se obține astfel

$$\mathrm{p}_i = -\frac{n^2\pi^2 K + C}{CKR}\,; \qquad \text{(A.12.9)}$$

se calculează

$$f'(\mathrm{p}) = \frac{l}{x}\,!\,\frac{\alpha'}{\alpha}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\right);$$

$$\alpha' = RC;$$

$$\operatorname{ch}\sqrt{\alpha} = \operatorname{ch}\,(-\mathrm{j}n\pi) = \cos\,n\pi = (-1)^n;$$

$$\operatorname{sh}\sqrt{\alpha} = \operatorname{sh}\,(-\mathrm{j}n\pi) = -\mathrm{j}\sin\pi n = 0;$$

$$\frac{1}{f'(\mathrm{p}_i)} = -\frac{x}{l}\cdot\frac{2(-1)^n n^2\pi^2}{RC}.$$

Se obține astfel funcția indicială

$$f(t) = \frac{x}{l}\left[1 - \frac{C}{6K} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2\pi^2 \exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 K + C}{CRK}\, t\right)}{(n^2\pi^2 K + C)/K}\right] \tag{A.12.10}$$

din care se deduce relația (4.51).

Anexa 13

Demonstrația relațiilor (4.63) și (4.65). Ecuațiile (4.60), (4.61), (4.62) transcrise în imagine Laplace au forma :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{U}}{\mathrm{d}x} &= -R_{01}\,\mathfrak{I}_1; \\ \frac{\mathrm{d}\mathfrak{U}}{\mathrm{d}x} &= -\left(\frac{1}{pK_{02}} + R_{02}\right)\mathfrak{I}_2; \\ \frac{\mathrm{d}\mathfrak{I}_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\mathfrak{I}_2}{\mathrm{d}x} &= -\mathrm{p}\,C_0\mathfrak{U}, \end{aligned} \tag{A.13.1}$$

din care rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathfrak{U}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{p}C_0R_{01}(pR_{02}K_{02} + 1)}{\mathrm{p}(R_{02}K_{02} + R_{01}K_{02}) + 1} = 0. \tag{A.13.2}$$

Soluția în imagine a ecuației diferențiale (A.13.2), pentru excitația treaptă de tensiune $u = U$, este

$$\mathfrak{U} = \frac{U}{\mathrm{p}} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,\lambda x}{\mathrm{sh}\,\lambda l} \tag{A.13.3}$$

unde :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\mathrm{p}^2R_{01}R_{02}C_0K_{02} + \mathrm{p}C_0R_{01}}{\mathrm{p}(R_{02}K_{02} + R_{01}K_{02}) + 1}}; \tag{A.13.4}$$

Dacă se ține seama de ecuațiile de legătură (4.59), între mărimile lineice și cele totale ale divizorului rezultă soluția în imagine sub forma

$$\mathcal{U} = \frac{U}{\mathrm{p}} \cdot \frac{1}{\dfrac{\mathrm{sh}\sqrt{\alpha}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{x}{l}\sqrt{\alpha}}} = \frac{U}{\mathrm{p}} \cdot \frac{1}{f(p)} \tag{A.13.5}$$

unde

$$\alpha = \frac{\mathrm{p}^2 R_1 R_2 C K_2 + \mathrm{p} C R_1}{\mathrm{p}(R_2 K_2 + R_1 K_2) + 1}; \tag{A.13.6}$$

Soluția în domeniul original este de forma ecuației (A.11.11). În acest scop, se calculează $1/f(0)$ prin dezvoltarea în serie a numitorului și numărătorului și ținînd seama că $x \ll l$. Astfel, rezultă

$$\frac{1}{\underset{p\to 0}{f(\mathrm{p})}} = \frac{1}{f(0)} = \frac{\dfrac{x}{l} + \dfrac{x^3}{l^3}\cdot\dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{x^5}{l^5}\cdot\dfrac{\alpha^2}{120}}{1 + \dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{\alpha^2}{120}} = \frac{x}{l}; \tag{A.13.7}$$

Pentru a calcula rădăcinile p_i ale numitorului, se observă că numitorul în relația (A.13.5) se anulează dacă

$$\mathrm{sh}\sqrt{\alpha} = \frac{1}{\mathrm{j}}\sin \mathrm{j}\sqrt{\alpha} = 0, \tag{A.13.8}$$

adică pentru

$$\sqrt{\alpha} = -\mathrm{j}n\pi, \tag{A.13.9}$$

ceea ce conduce la ecuația

$$\mathrm{p}^2 R_1 R_2 C K_2 + \mathrm{p}\,[C R_1 + n^2\pi^2 K_2(R_1 + R_2)] + n^2\pi^2 = 0$$

cu rădăcinile

$$\mathrm{p}_i = \frac{-CR_1 - n^2\pi^2 K_2(R_1 + R_2)}{2\,R_1 R_2 C K_2} \pm \sqrt{\frac{CR_1 + n^2\pi^2 K_2(R_1 + R_2)}{2\,R_1 R_2 C K_2} - \frac{n^2\pi^2}{R_1 R_2 C K_2}}. \tag{A.13.10}$$

Pentru $R_1 \gg R_2$ și $K_2 \gg \frac{C}{n^2\pi^2}$ relația (A.13.10)se transformă în

$$p_i = -a \pm b$$

$$a = \frac{n^2\pi^2}{2R_2C}\ ;\ b = \sqrt{\left(\frac{n^2\pi^2}{2R_2C}\right)^2 - \frac{n^2\pi^2}{R_1R_2CK_2}}\ ; \qquad \text{(A.13.11)}$$

Pentru a folosi expresia (A.11.17) pentru $f'(p)$, se calculează α' în ipoteza că $R_1 \gg R_2$ și se obține

$$\alpha' = R_2\,C\,\frac{p^2 + \frac{2}{R_1K_2}p + \frac{1}{R_1R_2K_2^2}}{p^2 + \frac{2}{R_1K_2}p + \frac{1}{K_2^2R_1^2}}. \qquad \text{(A.13.12)}$$

Prin introducerea în (A.13.12) a expresiei p_i din (A.13.11) se obține

$$\alpha' = \frac{\pm b\,\frac{n^2\pi^2}{R_2C} + \frac{n^4\pi^4}{2R_2^2C^2} + \left(1 + \frac{2\,R_2\,C^2}{R_1K_2^2\,n^4\,\pi^4}\right)}{\pm b\,\frac{n^2\pi^2}{R_2C} + \frac{n^2\pi^4}{2R_2^2C^2}\left(1 + \frac{2R_2^2C^2}{K_2^2R_1^2n^4\,\pi^4}\right)} \cdot R^2C. \qquad \text{(A.13.13)}$$

Dar cum $R_1 \gg R_2$ și $K_2 > C$ din relația (A.13.13) rezultă

$$\alpha' \approx R_2C. \qquad \text{(A.13.14)}$$

În relația (A.11.17) se observă :

$$\mathrm{ch}\sqrt{\alpha} = \mathrm{ch}(-jn\,\pi) = \cos\,n\,\pi = (-1)^n;$$

$$\mathrm{sh}\sqrt{\alpha} = \mathrm{sh}\,(jn\,\pi) = -j\,\sin\,n\,\pi = 0;$$

$$\alpha = -n^2\pi^2,$$

astfel că pentru $f'(p)$ se obține

$$f'(p) = \frac{l}{x} \cdot \frac{R_2C(-1)^n}{-2n^2\pi^2}\ ; \qquad \text{(A.13.15)}$$

iar funcția indicială rezultă

$$f(t) = \frac{x}{l}\left[1 - \frac{2}{R_2 C}\sum_{n-1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^2 n^2}{(-a \pm b)} e^{(-a+b)t}\right]. \qquad \text{(A.13.16)}$$

Pentru a extrage soluțiile distincte din relația (A.13.16) se observă că

$$\frac{e^{-a\pm bt}}{-a \pm b} \to -R_1 K_2 e^{-at}\left(\text{ch } bt + \frac{b}{a}\text{sh } bt\right). \qquad \text{(A.13.17)}$$

Rezultă astfel pentru funcția indicială din (A.13.16) expresia

$$f(t) = \frac{x}{l}\left[1 + \frac{2 R_1 K_2}{R_2 C}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2\pi^2 e^{-at}\left(\text{ch } bt + \frac{b}{a}\text{sh } bt\right)\right] \qquad \text{(A.13.18)}$$

și pentru răspunsul la excitația treaptă de amplitudine U, relația (4.63).

Dacă rezistența longitudinală $R_1 \to \infty$ rezultă din relația (A.13.11)

$$p_i = -\frac{n^2\pi^2}{R_2 C}, \qquad \text{(A.13.19)}$$

iar în locul relației (A.13.16) respectiv (A.13.18) se obține

$$f(t) = \frac{x}{l}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{R_2 C}t\right)\right], \qquad \text{(A.13.20)}$$

din care rezultă relația (4.65).

Anexa 14

Deducerea relației (4.66). Ecuațiile telegrafiștilor pentru o linie fără pierderi sînt:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t};$$
$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}; \qquad \text{(A.14.1)}$$

Prin aplicarea transformării Laplace se obține

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathcal{U}}{\mathrm{d}x^2} - \gamma^2 \mathcal{U} = 0; \tag{A.14.2}$$

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{\mathrm{p}L_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}, \tag{A.14.3}$$

unde

$$\gamma = \mathrm{p}\sqrt{L_0 C_0}.$$

Soluția ecuației (A.14.1) sub formă generală este

$$\mathcal{U} = A_1(\mathrm{p})\, \mathrm{e}^{-\gamma x} + A_2(\mathrm{p})\, \mathrm{e}^{\gamma x}, \tag{A.14.4}$$

iar pentru relația (A.14.3), ținînd seama că impedanța caracteristică $Z_c = \sqrt{L_0/C_0}$, rezultă

$$\mathcal{I} = \frac{1}{Z_c} [A_1(\mathrm{p})\, \mathrm{e}^{-\gamma x} - A_2(\mathrm{p})\, \mathrm{e}^{\gamma x}]. \tag{A.14.5}$$

Dacă se notează viteza de propagare $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$, se obțin soluțiile în domeniul imagine:

$$\mathcal{U} = A_1(\mathrm{p})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{p}\frac{x}{v}} + A_2(\mathrm{p})\, \mathrm{e}^{\mathrm{p}\frac{x}{v}} = \mathcal{U}_d + \mathcal{U}_r; \tag{A.14.6}$$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{Z_c} [A_1(\mathrm{p})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{p}\frac{x}{v}} - A_2(\mathrm{p})\, \mathrm{e}^{\mathrm{p}\frac{x}{v}}] = \mathcal{I}_d + \mathcal{I}_r. \tag{A.14.7}$$

Dacă se notează

$$\mathfrak{L}^{-1} A_1(\mathrm{p}) = f_1(t);$$

$$\mathfrak{L}^{-1} A_2(\mathrm{p}) = f_2(t),$$

rezultă [3]:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} A_1(\mathrm{p})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{p}\frac{x}{v}} &= f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \\ \mathfrak{L}^{-1} A_2(\mathrm{p})\, \mathrm{e}^{\mathrm{p}\frac{x}{v}} &= f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \end{aligned}\right\} t \geqslant \frac{x}{v} \geqslant 0,$$

iar soluţiile în domeniul original sînt:

$$u(t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right);$$

$$i(t) = \frac{1}{Z_c}\left[f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) - f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)\right]. \qquad \text{(A.14.8)}$$

Dacă se notează:

unda directă de tensiune $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = u_d$;

unda reflectată de tensiune $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = u_r$;

unda directă de curent $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)/Z_c = i_d$;

unda reflectată de curent $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)/Z_c = i_r$,

rezultă ecuaţiile generale:

$$u(t) = u_d + u_r;$$

$$i(t) = i_d - i_r. \qquad \text{(A.14.9)}$$

În cazul fig. 4.24, în domeniul imagine, se poate scrie în punctul C:

$$\mathcal{U}_c = \mathcal{U}_d + \mathcal{U}_r = \mathcal{I}_c \cdot \mathcal{Z}; \qquad \text{(A.14.10)}$$

$$\mathcal{I}_c = \mathcal{I}_d - \mathcal{I}_r = \frac{1}{\mathcal{Z}_c}(\mathcal{U}_d - \mathcal{U}_r). \qquad \text{(A.14.11)}$$

De unde rezultă

$$\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_d \frac{\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_c}{\mathcal{Z} + \mathcal{Z}_c}. \qquad \text{(4.66)}$$

Anexa 15

Deducerea relației (4.112). Timpul de răspuns se obține cu ajutorul relațiilor (4.91) ... (4.94) în succesiunea următoare :

a. Timpul de răspuns al divizorului

$$T_d = \frac{A_{11}^{d'}}{A_{11}^{d}(0)} = \frac{\frac{R^2C}{6R_2}}{\frac{R}{R_2}} = \frac{RC}{6} = T_3. \tag{A.15.1}$$

b. Timpul de răspuns corespunzător reflexiei la intrare în divizor ; se observă că $\mathfrak{Z}_c(p) = Z_c$,

$$T_{KC} = -\frac{k_C'(0)}{1 + k_C(0)} = \frac{T_2 + T_3 Z_C/R}{1 + Z_c/R}. \tag{A.15.2}$$

c. Timpul de răspuns corespunzător reflexiei la amortizare

$$T_{KB} = -\frac{k_B'(0)}{1 + k_B(0)} = 0 \tag{A.15.3}$$

deoarece $k_B(p) = 0$ la adaptarea liniei cu impedanța de amortizare

d. $\mathfrak{Z}_a(0)/\mathfrak{Z}_c = 1.$ (A.15.4)

e. Expresia

$$\frac{\frac{\mathfrak{Z}_d(0)\,\mathfrak{Z}_a(0)}{\mathfrak{Z}_c} + \mathfrak{Z}_c}{\mathfrak{Z}_d(0) + \mathfrak{Z}_a(0)} = 1. \tag{A.15.5}$$

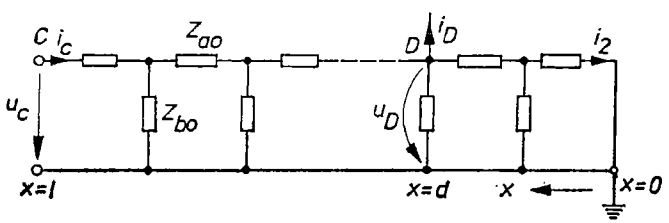
f. Expresia

$$\frac{\mathfrak{Z}_d(0) + \mathfrak{Z}_c}{\mathfrak{Z}_d(0) + \mathfrak{Z}_a(0)} = 1. \tag{A.15.6}$$

Prin introducerea relațiilor (A.15.1)...(A.15.6) în relația (4.91) se obține (4.112).

Anexa 16

Expresiile parametrilor fundamentali ai unui lanț de cuadripoli ce modelează un divizor de tensiune. În fig. A. 16.1 se prezintă schema lanțului de cuadripoli, în care C este borna de intrare în divi-



A.16,1. Relativ la determinarea parametrilor fundamentali ai lanțului de cuadripoli ce modelează un divizor de tensiune.

zor, iar D este borna de ieșire din care se extrage curentul i_D. S-a mai notat:

$\mathfrak{Z}_{a0}(p)$ — impedanța lineică operațională longitudinală;

$\mathfrak{Z}_{b0}(p)$ — impedanța lineică operațională transversală.

În general, pentru o linie cu constante uniform repartizate, ecuațiile tensiunii și curentului, la distanța x, sînt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U}_x &= \mathfrak{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z}_c \operatorname{sh} \gamma x \\ \mathfrak{I}_x &= \frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{Z}_0} \operatorname{sh} \gamma x + \mathfrak{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(A.16.1)}$$

unde:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_{a0}}{\mathfrak{Z}_{b0}}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_a}{\mathfrak{Z}_b}} \\ \mathfrak{Z}_c &= \sqrt{\mathfrak{Z}_{a0}\,\mathfrak{Z}_{b0}} = \sqrt{\mathfrak{Z}_a\,\mathfrak{Z}_b} \\ \mathfrak{Z}_0 &= \mathfrak{Z}_{a0} \cdot l\,; \quad \mathfrak{Z}_o = \mathfrak{Z}_{b0}/l \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.16.2)}$$

Dacă $\mathcal{I}_D = 0$, iar linia este scurtcircuitată în punctul $x = 0$, din relaţiile (A.16.1) se obţine :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{U}_c &= \mathcal{I}_2 \mathcal{Z}_c \operatorname{sh} \gamma l \\ \mathcal{I}_c &= \mathcal{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l \end{aligned}\right\}, \tag{A.16.3}$$

$$\mathcal{U}_D = \mathcal{I}_2 \mathcal{Z}_c \operatorname{sh} \gamma d \tag{A.16.4}$$

din care rezultă :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{U}_C &= \mathcal{U}_D \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_b}}}{\operatorname{sh} \frac{\mathrm{d}}{l} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_b}}} \\ \mathcal{I}_C &= \frac{\mathcal{U}_D}{\mathcal{Z}_c} \cdot \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_b}}}{\operatorname{sh} \frac{d}{l} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_b}}} \end{aligned}\right\}. \tag{A.16.5}$$

Dacă $\mathcal{I}_D \neq 0$, prin metoda suprapunerii efectelor, din ecuaţiile (A.16.1) şi (A.16.5) se obţin relaţiile finale :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{U}_C &= \mathcal{U}_D \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_b}}}{\operatorname{sh} \frac{d}{l} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_b}}} + \mathcal{I}_D \mathcal{Z}_C \operatorname{sh} \frac{l-d}{l} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_b}} \\ \mathcal{I}_C &= \frac{\mathcal{U}_D}{\mathcal{Z}_c} \cdot \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_b}}}{\operatorname{sh} \frac{d}{l} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_b}}} + \mathcal{I}_D \operatorname{ch} \frac{l-d}{l} \sqrt{\frac{\mathcal{Z}_a}{\mathcal{Z}_b}} \end{aligned}\right\}. \tag{A.16.6}$$

Prin trecerea la componente discrete ale divizorului de tensiune, lungimii l îi corespund m cuadripoli, iar lungimii d îi corespund n

cuadripoli. Astfel, parametrii fundamentali ai lanțului de cuadripoli, corespunzători divizorului de tensiune, rezultă [71]:

$$\left.\begin{aligned} A'_{11} &= \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_a}{\mathfrak{Z}_b}}}{\operatorname{sh}\frac{n}{m}\sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_a}{\mathfrak{Z}_b}}}; \quad A'_{12} = \mathfrak{Z}_c \operatorname{sh}\frac{m-n}{m}\sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_a}{\mathfrak{Z}_b}} \\ A'_{21} &= \frac{1}{\mathfrak{Z}_c}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_a}{\mathfrak{Z}_b}}}{\operatorname{sh}\frac{n}{m}\sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_a}{\mathfrak{Z}_b}}}; \quad A_{22} = \operatorname{ch}\frac{m-n}{m}\sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_a}{\mathfrak{Z}_b}} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(A.16.7)}$$

Anexa 17

Metoda Bergeron aplicată la un sistem de măsurare [50, 56]. Această metodă se bazează pe teoria undelor mobile (vezi A.14) aplicată unei linii fără pierderi. Soluțiile (A.14.8) se mai pot scrie sub forma:

$$\left.\begin{aligned} u &= g_1(x - vt) + g_2(x + vt) \\ i &= \frac{1}{Z_c}[g_1(x-vt) - g_2(x+vt)] \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(A.17.1)}$$

Prin ordonarea, respectiv scăderea ecuațiilor, se obține:

$$\left.\begin{aligned} u + Z_c\, i &= 2g_1(x - vt) \\ u - Z_c\, i &= 2g_2(x + vt) \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(A.17.2)}$$

După ideea lui Bergeron interpretarea acestor ecuații se face în felul următor:

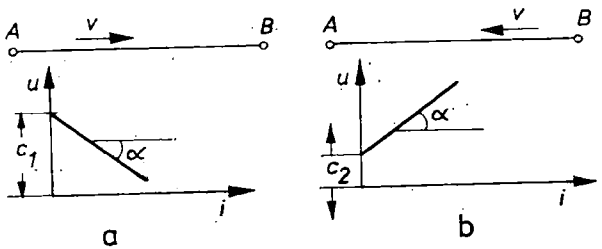
Pentru un observator care se deplasează odată cu unda directă de la extremitatea A a liniei către extremitatea B, ca în fig. A.17.1, *a*, starea electrică este descrisă de relația

$$u + Z_c\, i = C_1. \qquad \text{(A.17.3)}$$

Dacă observatorul călătorește din B în A odată cu unda reflectată, ca în fig. 9.17.1, *b*, starea electrică este descrisă de relația

$$u - Z_c\, i = C_2, \tag{A.17.4}$$

în care C_1 și C_2 sînt constante determinate de condițiile inițiale de la extremitățile liniei. Ecuațiile (A.17.3) și (A.17.4) sînt reprezentate în



A.17.1. Relativ la metoda Bergeron.

diagrame u, i ca în fig. A.17.1, prin dreptele Bergeron. Dreapta corespunzătoare undei directe are panta $\operatorname{tg} \alpha = -Z_c$, iar dreapta corespunzătoare undei reflectate are panta $\operatorname{tg} \alpha = Z_c$.

În cazul sistemului de măsurare, linia prezintă în amonte rezistența de amortizare R_a, iar în aval rezistența divizorului R, ca în fig. A.17.2.

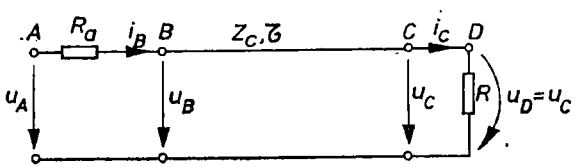


Fig. A.17.2. Sistem de măsurare cu rezistența de amortizare R_a, linia de racord Z_c și rezistența R.

Etapele de calcul ale metodei grafice Bergeron sînt :

a) se aleg scările pentru curenți și tensiuni și se calculează $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{u}{i} = \pm Z_c$;

b) se introduc în diagramă relaţiile $u = f(i)$ pentru extremităţile B şi C ale liniei, adică

$$u_B = u_A - R_a \cdot i_B \quad \text{şi} \quad u_C = Ri_C \quad \text{ca în fig. A.17.3, } a\,;$$

c) se stabileşte starea electrică a punctului B la $t = 0$ în felul următor : se presupune o undă reflectată plecînd din C la $t = -\tau$, adică din punctul $C_{-1\tau}$ (0,0)) din diagramă ; unda ajunge în punctul B la $t = 0$, adică în punctul $B_{0\tau}$ din diagramă ; acest punct se găseşte la intersecţia dreptei Bergeron l şi a dreptei $u_B = u_A - R_A\, i_B$;

e) pentru obţinerea stării electrice la $t = \tau$ în C, se desenează dreapta Bergeron *2*, corespunzătoare undei directe şi la intersecţia ei cu $u_C = R_a i_C$ se obţine $C_{1\tau}$ ş.a.m.d.

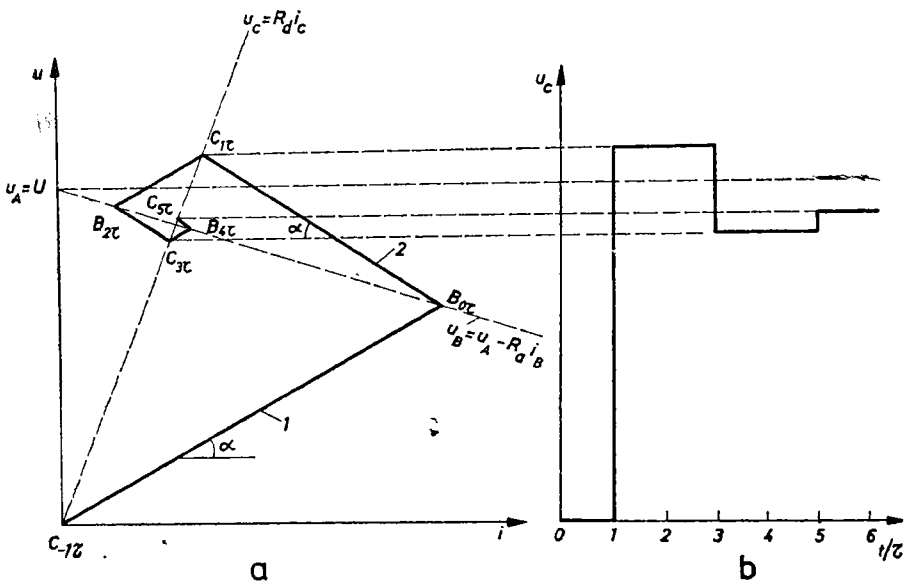


Fig. A.17.3. Construcţie grafică :

a — diagrama $u = f(i)$; *b* — diagrama răspunsului în tensiune $u_C = f(t)$.

În fig. A.17.3, *b* se trasează variaţia tensiunii $u_c = f(t)$, adică a răspunsului. Metoda Bergeron se pretează la programarea pe calculator [12].

Bibliografie

1 *Asner, A.* **Stosspannungsmesstechnik.** Berlin-Heidelberg-New York, Springer — Verlag, 1974.

2 *Avramescu, A.* **Uber die Zeitkonstante des Skinefektes.** „ETZ—A'', **3**, p. 78—82, (1959).

3 AEG — **Hilfisbuch 1. Grundlagen der Elektrotechnik,** Berlin Verlag Elitera, 1972.

4 *Bahrs, D.* **Zu Problemen der Spannungsmessung in der elektrischen Hochleishungstechnik.** „Wissenschaftlich — techniche Mitteilung IPH'' **12**, p. 21—26 (1971).

5 *Burch,* **On potential dividers for cathode ray oscillograph.** „Phil. Mag., Seria VII, vol. 13, p. 760, (1932).

6 *Cartianu, G.* **Analiza și sinteza circuitelor electrice.** București, Editura didactică și pedagogică, 1972.

7 *Constantinescu, E.* **Calculul efectului pelicular și determinarea stabiiității termice a conductorilor cilindrici masivi la curentul de șoc.** „Buletinul științific al Academiei R.P.R.'', Secțiunea de științe tehnice și chimice tom IV, **3—4**, p. 255—270 (1952).

8 *Creed, F., Kawamura, T., Newi, G.* **Step response of Measuring Systems for High Impulse Voltages.** „IEEE Transactions'', PAS—86, **11**, p. 1408—1420, (1967).

9 *Debelle, I.* **Determination de la transmitance d'un Systeme lineaire a partir de sa reponse indicielle.** „Reve trimestrielle d'automatique'', vol. IX, **3**, p. 135—144, (1967).

10 *Dharmalingan, K. și Gururaj, B. I.* **Step response of optimally damped.** EHV capacitive dividers. „IEEE Transactions'', PAS vol. 95, p. 1777—1783, (1967).

11 *Doelsch, G.* **Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.** Basel und Stuttgardt, Birkhäuser Verlag 1958.

12 *Dommel, H.* **Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single-and Multiphase Networks.** „Transactions IEEE'' PAS — 77, **4**, p. 388—399, (1969).

13 *Duytschaever, Dick.* **Calcul numerique de la reponse en frequence à partir de la réponse indicielle non idéale.** „Automatisme'', Tome XIII, **1**, Janvier (1968).

14 *E. d. F.* **La mesure des grandeurs électriques à variation ultrarapide.** Electricité de France HP 23—CG/n 6501, 1963.

15 *M. H. van Erk.* **Guarding techniques.** Number **1**, Number **2**, Philips T & M news 17.7201.20.4100.11 ; 17.7201.20.4130.11.

16 *Fesser, K.* **Bemessung von Elektroden im UHV-Bereich, gezeigt am Beispiel von Toroidelektroden für Spannungsteiler.** „Haefely Publication'' D1—30 p. **1—7**, (1975).

17 *Feser, K.* **Diviseur de tension d'un type nouveau, destiné à la mesure de tension de choc et de tensions de choc très elevées.** „Bul. ASE'', 62, **19**, p. 929—935, (1971).

18 *Feser, K.* **Transient behaviour of damped dividers of some million volts.** „IEEE Transactions'' PAS vol. **93**, p. 116—121, (1974).

19 *Gardiol, F.* **Adaptation conjuguée et adaptation de ligne.** „Bul. SEV'' 62, **26**, p. 1249—1251, (1971).

20. *Gary, M. G.* **Shunt coaxial pour la mesure de courants de choc.** „RGE", 65, 5, p. 279—289, (1959).

21 *Gille, J.C., Decaulne, P., Pelegrin, M.* **Theorie et calcul des asservissments lineaires.** Paris, Dunod, 1971.

22 *Graham, D., Lathrop, R. C.* **The Synthesis of „Optimum" Transient Response : Criteria and Standard Forms.** „AIEE Transactions" Part. II, Aplications and Industry, Vol. **73**, p. 273—288 (1953).

23 *Harada, T., Aoshima, .* **1 MV Universal voltage divider.** „Hochspannungskonferenz", München, p. 212—216 (1975).

24 *Harada, R., Kawamura, R., Akatsu, Y.* **Development of a high quality resistance divider for impulse voltage measurements** „Hochspannungskonferenz München" p. 2247—2250, (1975).

25 *Hölzer, E., Holzwarth, E.* **Theorie und Technik der Pulsmodulation.** Berlin/Gottingen/ Heidelberg, Spinger-Verlag, 1957.

26 *Hortopan, G.* **Performanţele divizorului de tensiune mixt, serie R-C.** „Electrotehnica" 21, **2**, p. 74—79, (1973).

27 *Hortopan, G., Hortopan, V.* **Das Verhalten der Koaxialen Messwiderstände beim Messen elektrischer Ströme.** „Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. et Energ." 19, **1**, p. 41—47, (1974).

28 *Hortopan, G., Hortopan, V., Truşcă, V.* **Echipament specific pentru încercarea aparatelor de comutaţie.** „Electrotehnica", 23, **1**, p. 1—8, (1975).

29 *Hortopan, V.* **Răspunsul la excitaţia treaptă de curent a conductorului cilindric plin.** „Electrotehnica", 18, **4**, p. 118—121, (1970).

30 *Hortopan, G.* **Tehnica impulsului în laboratorul de înaltă tensiune.** Bucureşti, Editura. tehnică, 1965.

31 *Hortopan, V.* **Calculul pierderilor suplimentare de căldură ale conductoarelor cilindrice în regim tranzitoriu.** „Electrotehnica", 24, **1**, p. 1—8, (1976).

32 *Hortopan, G.* **Aparate electrice.** — Ediţia a II-a. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1972.

33 *Hortopan, V.* **Răspunsul la excitaţia treaptă de curent a conductorului tubular.** „Electrotehnica", 18, **5**, p. 160—166, (1970).

34 *Hortopan, G., Hortopan, V., Pavelescu, D.* **Criterille de dimensionare ale şuntului coaxial.** „Electrotehnica", 20, **6**, p. 218—224, (1972).

35 *Hortopan, V.* **Metode de compensare ale şunturilor coaxiale.** „Electrotehnica", 19, **6**, p. 223—227, (1971).

36 *Hortopan, G., Hortopan, V.* **Eine allgemeine Theorie der Messwiderstände im Übergangszustand.** „ETZA", 92, **8**, p. 470—474, (1971).

37 *Hortopan, V.* **Folosirea funcţiilor de transfer la determinarea criteriului de calitate al dispozitivelor de măsură pentru curenţi cu variaţii rapide.** „Electrotehnica", 19, **4**, p. 128—133, (1971).

38 *Hortopan, G.* **Şunturi coaxiale pentru curenţi limită.** „Electrotehnica", 21, **2**, p. 53—58, (1977).

39 *Hortopan, G., Hortopan, V.* **Şunt coaxial cu timp de răspuns compensat.** Certificat de inventator OSIM nr. 58987/1974.

40 *Jahnke — Emde — Lösch.* **Tafeln hoherer Funktionen.** Stuttgart Sechste Auflage, Teubner, 1960.

41 **Isabellenhütte — Manganin.** Catalog III B 6 EWD II/68 3 000.

42 *Kaden, H.* **Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik.** Berlin-Heidelberg-New york, 2 Auflage, Springer, 1959.

43 *Kalantarov, P. L., Teiltin, L. A.* **Calculul inductanţelor** (traducere din limba rusă), Bucureşti, Editura tehnică, 1958.

44 *Kesselring, W.* **Theoretische Grundlagen-zur Berechnung der Schaltgeräte.** Sammulung Göschen, Berlin, Walter de Gruyter, 1968.

45 *Lago, B., Ealok, R.* **Coaxial Shunts.** Proc IEE vol. 114, 1967, p. 1317—1324.

46 *Luhrman, H., Melewski.* **Sprungantwort und Antwortzeit rohrtörmiger koaxialer Strom-Messwiderstande beliebiger** Wandstärke. „Arch f. Electrotech. 57, **3**, p. 11—118, (1975).

47 *Miller, K. W.* **Difusion on electric current into rods, tubes and flat surfaces.** „Transactions AIEE'' vol. 66, p. 1496—1502, (1947).

48 *Mocanu, C.* **Bazele electrotehnicii III** — 4 Curenţi variabili în conductoare masive, Bucureşti, Ed. IPB, 1969

49 *Möller, K.* **Eine einfache Anordnung zum Messen der Rechteckstoss-Wiedergabe von Strom-Messwiderständen kurzer Anstiegszeit.** „ETZA, 89, **17**, p. 414—415, (1968).

50 *Möller, K.* **Hochspannungstechnik I, Hilfsblätter zur Vorlesung T. H.**, Aachen, 1976.

51 *Palva, M. V.* **Confrontés aux problèmes de mesure en THT.** „Electra'', **35**, p. 157—254, (iulie 1974).

52 *Park, I. R.* **Surge measurement errors introduced by coaxial cables.** „AIEE Transactions vol. 77, Com. & Electronics **37**, p. 343—350, (1958).

53 *Penescu, C. ş.a.* **Identificarea automată a proceselor automatizate.** Bucureşti, Editura tehnica, 1971.

54 *Pfeiffer, W.* **Aufbau und Anwendung kapazitiver Spannungsteiler extrem kurzer Anstiegszeit für gasizolierte koaxialsysteme.** „ETZ-A 94, **2**, p. 91—94 (1973).

55 *Pfeiffer, W.* **Impulstechnik**, Wien-Munchen, Carl Hanser-Verlag 1976.

56 *Prinz, H., Zaengl, W., Völcker, O.* **Das Bergeron-Verfahren zur Lösung von Wanderwellenaufgaben.** „Bul. ASE vol. 53, **16**, p. 725—739, (1962).

57. *Răduleţ, R.* **Bazele teoretice ale electrotehnicii, Vol. I.** Bucureşti, Litografia învăţământului, 1955.

58 *Rieder, W., Urbanek, J.* **Nouveau aspects de recherches de l'effet du passage à zero du courant sur les reamorsages dans les disjoncteurs. Une theorie des conditions de non-équilibre thermie des arcs''.** CIGRE'' Rap. 107, (1966).

59 *Rijanto, Hendro.* **Ein experimentalles Verfaren zur Bestimmnung von Lichtbogenkenngrössen.** Hannover, Dissertation T. H. 1975.

60 *Rljic, I. M., Gradstein, I. S.*, **Tabele şi integrale, sume, serii şi produse** (traducere din limba rusă), Bucureşti, Editura tehnică, 1955.

61 *Schwab, A., Pagel, I.* **Kapazitiver Spannungsteiler.** J.ahresbericht 1972, Hochspannuninstitut T. H. Karlsruhe.

62 *Schwab, A.* **Hochspannungsmesstechnik**, Berlin-Heidelberg, New York, Springer, 1969.

63 *Schwab, A., Pagel, H.* **Precision capacitiv Voltage Divider for Impulse Voltage Mesurements.** „IEEE Transaction'' PAS vol. 91, **6**, p. 2376—2382, (1972).

64 *Schwab, A. Herold, J.* **Electromagnetische Interferenzerscheinungen Schnell veränderlicher Spannungen und Ströme.** „ATM Blatt'' V 3362, **5**, p. 185—188, (1973).

65 *Titz, G., Ludu, N., Şerbănescu, M.* **Indrumar de laborator la Mutatoare,** IPB, 1976.

66 *Wilson, W., R. Mankoff, L. L.* **Short circuit Forces in isolated phase Busses.** „Trans. AIEE PAS'' **75**, p. 382—395, (1954).

67 *Wolf, H.* **Uber den Zusammenhang zwischen Bandbreite und Anstiegszeit.** „Elektronik'', **10**, p. 303—308, (1963).

68 *Wunsch, G.* **Theorie und Anwendung linearer Netzwerke.** Teil I, Teil II. Leipzig, Geest & Portig, 1961, 1964.

69 *Zaengl, W., Freser, K.* **Ein Beitrag zur Berechnung des Übertragungsverhaltens van Stossspannungsteilern,** „Bul. SEV'', 55, **25**, S. 1249—1256, (1964).

70 *Zaengl, W.* **„Ein neuer Teiler fur steile Stosspannungen.** „Bul. SEV'' 56, 7, p. 232—240, (1965).

71 *Zaengl, W.* **Der Stossspannungsteiler mit Zuleitung.** „Bul. SEV'' 61, **21**, p. 1—15, (1970).

72 *Zeveke, G., Iankin, P., Netushil, A., Strakhov, S.* **Analysis of electric Circuits.** Moscow, Mir Publischer, 1969.

73 42(BC)27 : **Techniques des essais à haute tension. Dispositifs de mesure. Guide d'application.** Projet, CEI, 1976.

74 Publication 60—1. **Techniques des essais à haute tension. Première partie. Definitions et prescriptions générales relatives aux essais.** CEI- Geneve, 1973.

75 Publications 60—2. **Techniques des essais à haute tension.** Deuxième partie. **Modalités d'essais.** Geneve, CEI, 1973.

76 Publication 60—3. **Techniques des essais à haute tension.** Troisième partie. **Dispositifs de mesure.** Geneve, CEI, 1976.

77 Publication 71 **Recommandation pour la cordination de l'isolement.** Geneve, CEI, 1976.

Au mai apărut:

Nitu V., Albert H., Brădescu M.
Metode statistico-probabilistice utilizate în energetică

Nicolaide A.
Producerea energiei electrice pe cale magnetohidrodinamică

Preda M., Cristea P.
Analiza şi sinteza circuitelor electrice

Bălan Gh. ş.a.
Coordonarea izolaţiei în sistemele electrice

Penescu C., Călin S.
Protecţia prin relee electrice a sistemelor electrice

Gheorghiu N., Militaru P.
Teoria şi practica iluminatului electric

Goia L. ş. a.
Coroziunea şi protecţia anticorosivă a conductelor electrice

Hore R. A.
Metode moderne de calcul şi proiectare a sistemelor electrice

Dimo P. ş. a.
Calculul şi proiectarea sistemelor electroenergetice

Müller R.
Protecţia contra tensiunilor de atingere în instalaţiile de joasă tensiune

Venikov A. V.
Aplicarea teoriei similitudinii şi modelării în electroenergetică

Nitu V. ş. a.
Instalaţiile electrice ale centralelor şi staţiilor

Clarke Edith
Analiza circuitelor sistemelor electroenergetice

Savin Gh., Rosman H.
Circuite electrice neliniare şi parametrice

Bercovici M., Arie A., Poeată Al.
Reţelele electrice. Calculul electric

Gheorghiu N., Gayraud J., Rădoi A.
Utilizarea energiei electrice în industrie şi agricultură

Dan I., Moseanu Al.
Redresoare cu semiconductoare

Happ H.
Diakoptica — metodă de analiză a sistemelor complexe

Drăgan G. ş. a.
Supratensiuni interne în sistemele electroenergetice

Antoniu I. S. ş. a.
Calculul circuitelor electrice în regimuri normale şi anormale de funcţionare. Probleme

Călin S., Marcus S.
Protecţia prin relee a sistemelor electrice. Ediţia a II-a

Tănăsescu Fl., Cramariuc R.
Electrostatica în tehnică

Potolea E.
Calculul regimurilor de funcţionare a sistemelor electroenergetice

Vor apărea:

Arie A. ş. a.
Reţele electrice. Calculul mecanic

Mihăileanu C.
Goluri de tensiune în sistemele electroenergetice

Lei 11